UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

OPTIMIZACIÓN DE FILTROS PASIVOS PARA LA COMPENSACIÓN DE REACTIVA Y MITIGACIÓN DE ARMÓNICOS EN INSTALACIONES INDUSTRIALES

TESIS DOCTORAL

por

José María Maza Ortega
Ingeniero Industrial por la E.T.S. de Ingenieros Industriales
de la Universidad de Sevilla

Sevilla, Julio de 2001.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

OPTIMIZACIÓN DE FILTROS PASIVOS PARA LA COMPENSACIÓN DE REACTIVA Y MITIGACIÓN DE ARMÓNICOS EN INSTALACIONES INDUSTRIALES

TESIS DOCTORAL

por

José María Maza Ortega
Ingeniero Industrial por la E.T.S. de Ingenieros Industriales
de la Universidad de Sevilla

Sevilla, Julio de 2001.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

OPTIMIZACIÓN DE FILTROS PASIVOS PARA LA COMPENSACIÓN DE REACTIVA Y MITIGACIÓN DE ARMÓNICOS EN INSTALACIONES INDUSTRIALES

TESIS DOCTORAL

Autor: D. José María Maza Ortega
Directores: D. Carlos Izquierdo Mitchell
D. Manuel Burgos Payán

TRIBUNAL CALIFICADOR

Presidente: D. Carlos Lemos Antunes
Secretario: D. Manés Fernández Cabanas
Vocales: D. Antonio Gómez Expósito
D. Manuel Pérez Donsión
D. Alfredo Quijano López

Obtuvo la calificación de Sobresaliente "Cum Laude" por unanimidad

Sevilla, 27 de Septiembre de 2001

A mis padres y a Pilar.

"La duda es la base del ingenio"
Galileo Galilei

Agradecimientos

Sería injusto no comenzar las páginas de esta tesis con el reconocimiento merecido a todos los que, de alguna manera u otra, han estado presentes en la elaboración de la misma. La dirección ejercida por D. Carlos Izquierdo Mitchell y D. Manuel Burgos Payán ha sido ejemplar y ha supuesto la consecución de un periodo formativo que empezó hace tiempo, cuando comencé a colaborar con el Departamento en mi último año de carrera. Sin su ayuda, cedida desinteresadamente, hubiera sido impensable estar ahora escribiendo estas líneas.

Por otra parte, también ha ayudado al desarrollo de la tesis el extraordinario ambiente de optimismo y trabajo que existe en el Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Sevilla, destacando no sólo las cualidades técnicas de mis compañeros, sino también el factor humano, tan importante en el trabajo en equipo.

Finalmente, quisiera agradecer a mi familia el apoyo y la ilusión que, desde el inicio, me han dado para emprender este proyecto. Y a Pilar, por las muchas horas que le he robado del tiempo que deberíamos haber compartido.

Sevilla, Julio de 2001.

Índice General

1 Resumen y objetivos de la tesis **1**

2 Introducción **5**
2.1 Introducción 5
2.2 Los armónicos en el sistema eléctrico 5
2.3 Potencia en sistemas de corriente alterna senoidal en régimen permanente 6
2.3.1 Sistemas monofásicos 6
2.3.2 Sistemas trifásicos equilibrados 8
2.4 Potencia en sistemas de corriente alterna no senoidales en régimen permanente 9
2.4.1 Sistemas monofásicos 9
2.4.2 Sistemas trifásicos equilibrados 11
2.5 Compensación de reactiva y armónicos 12
2.6 Resumen del capítulo 13

3 Estado del Arte **15**
3.1 Introducción 15
3.2 Definiciones de potencia reactiva en sistemas no senoidales . . . 16
3.2.1 Sistemas monofásicos 17
3.2.1.1 Dominio de la frecuencia 17
3.2.1.1.1 Budeanu 17
3.2.1.1.2 Zakikhani y Shepherd 18
3.2.1.1.3 Sharon 19
3.2.1.1.4 Slonim y Van Wyk 20
3.2.1.1.5 Czarnecki 21
3.2.1.2 Dominio del tiempo 22
3.2.1.2.1 Fryze 22
3.2.1.2.2 Kusters y Moore 23

3.2.1.2.3 Page 24
3.2.1.3 Resumen de las descomposiciones de potencia . 25
3.2.2 Sistemas trifásicos 25
3.2.2.1 Sistemas trifásicos de tres hilos 26
3.2.2.1.1 Czarnecki 26
3.2.2.1.2 Akagi 29
3.2.2.1.3 Willems 30
3.2.2.1.4 Ferrero y Superti-Furga 31
3.3 Filtros pasivos sintonizados 35
3.3.1 Steeper 37
3.3.1.1 Phipps 37
3.3.2 Kawann y Emanuel 38
3.3.3 Mattavelli 38
3.3.4 Lin 40
3.3.5 Czarnecki 41
3.3.6 Czarnecki y Ginn 44
3.4 Resumen del capítulo 45

4 Compensación mediante filtros pasivos 47
4.1 Introducción 47
4.2 Planteamiento del problema 48
4.2.1 Potencia reactiva 48
4.2.2 Compensación de reactiva 49
4.2.2.1 Carga conectada a un sistema de potencia de cortocircuito infinita 52
4.2.2.2 Carga conectada a un sistema de potencia de cortocircuito finita 54
4.2.3 Algoritmo de punto interior 57
4.3 Optimización mediante técnicas de punto interior 58
4.3.1 Compensación con filtro pasivo o condensador 59
4.3.1.1 Determinación de las resonancias 59
4.3.1.2 Formulación del problema 60
4.3.2 Compensación con banco de filtros sintonizados 63
4.3.2.1 Determinación de las resonancias 63
4.3.2.2 Resonancias: banco de dos filtros 64
4.3.2.3 Determinación de las zonas factibles 67
4.3.2.4 Formulación del problema 70
4.3.3 Restricciones adicionales 73
4.3.3.1 Introducción de resonancias ficticias 74

4.3.3.2 Restricción de potencia reactiva en el armónico fundamental . . . 77
4.4 Diseño del algoritmo de punto interior . . . 78
4.5 Resumen del capítulo . . . 81

5 Ejemplos de aplicación **83**
5.1 Introducción . . . 83
5.2 Consideraciones generales . . . 85
5.3 Compensación con condensador . . . 88
5.3.1 Distorsión de intensidad . . . 89
5.3.2 Distorsión de tensión . . . 92
5.3.3 Longitud de la línea . . . 94
5.4 Compensación mediante filtro sintonizado . . . 96
5.4.1 Distorsión de tensión e intensidad . . . 98
5.4.2 Variación de la frecuencia de sintonización . . . 101
5.5 Compensación mediante banco de filtros sintonizados . . . 101
5.6 Aspectos numéricos del algoritmo . . . 107
5.6.1 Zonas factibles . . . 107
5.6.2 Número de iteraciones . . . 108
5.6.3 Función lagrangiana, error medio de dualidad y factor de penalización . . . 109
5.6.4 Evolución de la función objetivo con el número de iteraciones . . . 110
5.7 Resumen del capítulo . . . 110

6 Validación experimental **113**
6.1 Introducción . . . 113
6.2 Red de distribución estudiada . . . 114
6.3 Instrumentación utilizada . . . 124
6.4 Compensación con condensador . . . 126
6.4.1 Interacción red-carga no lineal . . . 129
6.5 Compensación con banco de filtros sintonizados . . . 137
6.5.1 Optimización del banco de filtros . . . 137
6.5.2 Dimensionado de los componentes del filtro . . . 143
6.5.3 Comparación de resultados teóricos y experimentales . . . 146
6.5.4 Evaluación de la compensación . . . 153
6.6 Resumen del capítulo . . . 154

7 Conclusiones y futuras líneas de investigación **157**
7.1 Resumen y conclusiones 157
7.2 Sugerencias y futuras líneas de investigación 159

A Modelo de la carga no lineal **161**
A.1 Introducción 161
A.2 Simplificaciones del modelo 162
A.3 Análisis de los modos de funcionamiento del rectificador 163
A.4 Cálculo de los instantes de conducción 169
A.5 Aplicación de las condiciones de contorno 170
A.5.0.1 Tensiones equilibradas 170
A.5.0.2 Tensiones desequilibradas 172
A.6 Ajuste de la tension del condensador 173
A.7 Cálculo de los armónicos de intensidad 174
A.8 Validación experimental del modelo 178

B Instrumentación eléctrica **185**
B.1 Introducción 185
B.2 Transductores de tensión 185
B.3 Transductores de intensidad 187
B.4 Cuadro central de sensores 189
B.5 Tarjeta de adquisición de datos 190
B.6 Descripción del instrumento virtual 192

Índice de Figuras

2.1 Representación fasorial de la potencia activa y reactiva. 7
2.2 Representación vectorial de la potencia activa, reactiva, distorsionante y aparente. 10

3.1 Filtro pasivo sintonizado. 36
3.2 Circuito equivalente de un sistema de distribución. 39
3.3 (a) Diagrama de impedancia desde la carga. (b) Diagrama de admitancia desde la fuente. 43

4.1 Esquema unifilar y equivalente armónico de una instalación industrial. 50
4.2 Compensación de reactiva mediante métodos pasivos. 51
4.3 Descomposición ortogonal de la intensidad sobre la tensión. 52
4.4 Valor eficaz de la intensidad del sistema en función del condensador. 56
4.5 Proceso iterativo de minimización con tensiones constantes. 56
4.6 Fundamento de los métodos de punto interior de barrera logarítmica. 58
4.7 Posibles rectas de resonancia. 65
4.8 Regiones que crea una resonancia en el caso bidimensional. 67
4.9 Casos en los que no se produce intersección de las resonancias. . . . 69
4.10 Punto de diseño y resonancias.(a) Punto de diseño en el plano $C_s - C_i$. (b) Impedancia equivalente desde la carga. 75
4.11 Introducción de resonancias ficticias y zona factible. 76
4.12 Restricción de potencia reactiva en el armónico fundamental. 78
4.13 Cálculo del factor de avance. 80

5.1 Esquema unifilar de la red a estudiar. 85
5.2 Compensación con condensador. Valor eficaz de la intensidad frente a la capacidad del condensador. 88
5.3 Compensación con condensador. (a) Espectro armónico de intensidad y tensión antes y después de la compensación. (b) Intensidad y tensión de fase antes y después de la compensación. 90

5.4 Compensación con condensador. Capacidad del condensador óptimo y valor eficaz de la intensidad relativo al inicial, respecto a la distorsión de carga. 91
5.5 Compensación con condensador. Distorsión de tensión e intensidad antes de la compensación y relativas después de la misma. 92
5.6 Compensación con condensador. (a) Intensidad después de compensar respecto a distorsión de tensión e intensidad. (b) Distorsión de intensidad después de compensar frente a distorsión de tensión e intensidad. 93
5.7 Compensación con condensador. Comparación de las curvas de valor eficaz de intensidad frente a la capacidad del condensador para longitudes de línea de: (a) 1 (p.u.). (b) 10 (p.u.). 94
5.8 Compensación con condensador. (a) Capacidad del condensador óptimo y valor eficaz de la intensidad relativo respecto a la longitud de la línea en por unidad. (b) Distorsión de intensidad y tensión antes y después de la compensación respecto a la longitud de la línea en por unidad. 95
5.9 Compensación con filtro sintonizado. Valor eficaz de la intensidad frente a la capacidad del condensador. 97
5.10 Filtro sintonizado. Espectro armónico de intensidad y tensión antes y después de la compensación. 97
5.11 Compensación con filtro sintonizado. Valor eficaz de intensidad frente a distorsión de tensión e intensidad. 99
5.12 Compensación con filtro sintonizado. Capacidad del condensador óptimo frente a distorsión de tensión e intensidad. 100
5.13 Compensación con filtro sintonizado. Distorsión de intensidad frente a distorsión de tensión e intensidad. 100
5.14 Compensación con filtro sintonizado. Valor eficaz de intensidad y capacidad del condensador óptimo frente a frecuencia de sintonización. 101
5.15 Compensación con filtro sintonizado. Distorsión de tensión e intensidad frente a frecuencia de sintonización. 102
5.16 Compensación con banco de dos filtros sintonizados. Valor eficaz de intensidad frente a capacidad de condensadores. 105
5.17 Compensación con banco de dos filtros sintonizados. Curvas de nivel del valor eficaz de intensidad. 105
5.18 Compensación con banco de dos filtros sintonizados. Rectas de resonancia y localización de mínimos locales. 106

5.19 Compensación con banco de dos filtros sintonizados: 5 y 7. (a) Valor eficaz de intensidad frente distorsión de intensidad y tensión. (b) Distorsión de intensidad frente a distorsión de tensión e intensidad. . 106
5.20 Compensación con banco de tres filtros sintonizados: 5, 7 y 11. (a) Valor eficaz de intensidad frente distorsión de intensidad y tensión. (b) Distorsión de intensidad frente a distorsión de tensión e intensidad.107
5.21 (a) Funciones objetivo y Lagrangiana frente a número de iteraciones. (b) Factor de penalización frente a número de iteraciones. 109
5.22 Curvas de nivel de la función lagrangiana. (a) Iteración 1. (b) Iteración 3. (c) Iteración 5. (d) Iteración 10 111

6.1 Sistema de distribución estudiado. 114
6.2 Evolución de la secuencia positiva y negativa de la componente fundamental y de la secuencia negativa del quinto armónico de la tensión de la red 115
6.3 Impedancias que simulan el comportamiento de la línea y transformadores. 117
6.4 Carga lineal utilizada. (a) Resistencias. (b) Bobinas. 118
6.5 Variador de velocidad de alterna utilizado. (a) Exterior. (b) Interior. 119
6.6 Grupo motor-generador accionado por el variador de velocidad. . . . 119
6.7 Intensidades absorbidas por la carga no lineal. 120
6.8 Intensidad absorbida por la carga no lineal en el dominio de Park. . . 121
6.9 Armónicos de la intensidad absorbida por la carga no lineal. (a) Secuencia positiva. (b) Secuencia negativa. 122
6.10 Efecto de la inductancia de conmutación en las intensidades del rectificador. 123
6.11 Vista general del montaje realizado en el laboratorio. 123
6.12 Transductor de tensión. (a) Exterior. (b) Interior. 124
6.13 Tablero de centralización de sensores de intensidad. 125
6.14 Ventana principal del instrumento virtual. 126
6.15 Comparación de resultados teóricos y experimentales. (a) Valor eficaz de intensidad del sistema relativo al inicial. (b) Distorsión de intensidad 127
6.16 Valores eficaces de intensidad de distintos armónicos en función de la capacidad del condensador. 128
6.17 Intensidades absorbidas por la fase a de la carga no lineal. (a) Sin condensadores. (b) 2.5 kVAR de condensadores. 129

6.18 Variación de los armónicos de la carga no lineal con la capacidad del condensador. (a) Fundamental. (b) (b) Quinto armónico. (c) Séptimo armónico. (d) Decimoprimer armónico. 130
6.19 Condensador. Comparación de las intensidades de la fase *b*. (a) Sin condensador. (b) 0.5 kVAR. (c) 1.5 kVAR. (d) 2 kVAR. (e) 2.5 kVAR. (f) 3 kVAR. 134
6.20 Condensador. Comparación de los armónicos en función del condensador instalado. (a) Fundamental. (b) Quinto armónico (c) Séptimo armónico. (d) Decimoprimer armónico. (e) Decimotercer armónico (f) Decimoséptimo armónico. 135
6.21 Comparación de resultados teóricos y experimentales con interacción red-carga no lineal. (a) Valor eficaz de intensidad del sistema relativo al inicial. (b) Distorsión de intensidad. 136
6.22 Representación de las restricciones con límites 4.5 y 6.5. 140
6.23 Representación de las restricciones con límites 4.2 y 6.2. 140
6.24 Ganancias después de la instalación del banco de filtros.(a) Impedancia desde la carga. (b) Admitancia desde la fuente. (c) Ganancia de intensidades. 142
6.25 Filtros pasivos instalados. 144
6.26 Comparación de impedancias teóricas y experimentales. (a) Filtros quinto y séptimo armónico. (b) Filtro decimoprimer armónico. (c) Banco de filtros. 145
6.27 Comparación de los armónicos de la intensidad de la carga no lineal. (a) Secuencia positiva. (b) Secuencia negativa. 148
6.28 Comparación de los armónicos de la intensidad del sistema. (a) Secuencia positiva. (b) Secuencia negativa. 150
6.29 Comparación de intensidades teóricas y experimentales antes y después de la compensación. 152
6.30 Comparación de resultados experimentales antes y después de la compensación. 154

A.1 Esquema del variador de velocidad utilizado 161
A.2 Simplificaciones del modelo. (a) Carga desde el enlace de continua. (b) Tensión del condensador constante. (c) Modelo simplificado final. 163
A.3 Intensidades demandadas por el rectificador no controlado. 164
A.4 Intervalo 1. Conducción fases *b* y *c*. 165
A.5 Intervalo 2. Conmutación fases *a* y *c*. 165
A.6 Intervalo 3. Conducción fases *a* y *b*. 167
A.7 Intervalo 4. Conmutación fases *b* y *c*. 167

A.8 Intervalo 5. Conducción fases a y b. 168
A.9 Intervalo 6. Conmutación fases a y b. 168
A.10 Intervalo 7. Conducción fases b y c. 169
A.11 Tensión de alimentación. (a) Tensiones simples. (b) Armónicos. . . . 179
A.12 Intensidades absorbidas por el rectificador calculadas por el modelo. . 180
A.13 Comparación de intensidades teóricas y experimentales. 181
A.14 Comparación de resultados teóricos y experimentales. (a) Valor eficaz. (b) Fase. 181
A.15 Comparación de resultados teóricos y experimentales. Secuencia inversa. (a) Valor eficaz. (b) Fase. 182

B.1 Esquema del transductor de tensión. 185
B.2 Transductor de tensión. (a) Exterior. (b) Interior. 187
B.3 Tablero de centralización de sensores de intensidad. 189
B.4 Placas de alimentación de sensores y entrada/salida de la tarjeta de adquisición de datos. 190
B.5 Cola circular de la tarjeta de adquisición de datos. 191
B.6 Muestreo simultáneo de dos canales. 193
B.7 Muestreo simultáneo de m canales. Referencia de todas las muestras al mismo punto. 193
B.8 Ventana principal del instrumento virtual. 195

Índice de Tablas

3.1 Resumen de las descomposiciones de potencia. 25

5.1 Impedancias de la red de distribución de la Figura 5.1. 85
5.2 Niveles máximos de armónicos permitidos en redes de distribución públicas según EN50160. 86
5.3 Contenido armónico de la intensidad no lineal. 87
5.4 Compensación con condensador. Resumen de resultados del proceso de optimización. 89
5.5 Compensación con filtro sintonizado. Resumen de resultados del proceso de optimización. 98
5.6 Compensación con banco de dos filtros sintonizados. Resumen de resultados del proceso de optimización. 103
5.7 Compensación con banco de tres filtros sintonizados. Resumen de resultados del proceso de optimización. 103
5.8 Compensación con banco de cuatro filtros sintonizados. Resumen de resultados del proceso de optimización. 104
5.9 Zonas factibles a estudiar en función del número de filtros. 108
5.10 Número de iteraciones en función de los filtros instalados para distorsiones pequeñas: distorsión de tensión 0.8% e intensidad 20%. . . 108
5.11 Número de iteraciones en función de los filtros instalados para distorsiones altas: distorsión de tensión 4% e intensidad 50%. 108

6.1 Valores de impedancias de líneas y transformadores. 116
6.2 Valores aproximados de impedancias de líneas y transformadores. . . 116
6.3 Valores de impedancia de las bobinas para distintas frecuencias. . . . 117
6.4 Comparación de los resultados teóricos y experimentales. 127
6.5 Comparación de los resultados teóricos y experimentales considerando la interacción entre la red y el condensador. 136
6.6 Armónicos de la tensión de alimentación. 138
6.7 Armónicos de la intensidad de la carga no lineal. 139

6.8 Comparación de dos bancos de filtros. $k_{lim1} = 4.5$, $k_{lim2} = 6.5$. . . . 141
6.9 Dimensionado previo de los filtros pasivos. 143
6.10 Dimensionado final de los filtros pasivos. 144
6.11 Medida de la impedancia de los filtros. 146
6.12 Comparación de resultados teóricos y experimentales. 147
6.13 Comparación de las intensidades de la carga no lineal. Secuencia positiva. 149
6.14 Comparación de las intensidades de la carga no lineal. Secuencia negativa. 149
6.15 Comparación de las intensidades del sistema. Secuencia positiva. . . 151
6.16 Comparación de las intensidades del sistema. Secuencia negativa. . . 151
6.17 Evaluación de la compensación realizada. 153
6.18 Comparación de resultados experimentales antes y después de la compensación. 155

A.1 Constantes de la intensidad $i_a(t)$ 175
A.2 Constantes de la intensidad $i_b(t)$ 175
A.3 Impedancias utilizadas. 178
A.4 Armónicos de la tensión de alimentación. 179
A.5 Resultados del modelo. 179
A.6 Comparación de resultados teóricos y experimentales. Secuencia positiva. 182
A.7 Comparación de resultados teóricos y experimentales. Secuencia negativa. 183

B.1 Especificaciones técnicas de los transductores de tensión. 186
B.2 Especificaciones técnicas de los transductores de intensidad de núcleo continuo. 188
B.3 Especificaciones técnicas de los transductores de intensidad de núcleo partido. 188
B.4 Especificaciones técnicas de la tarjeta de adquisición de datos. 190

Capítulo 1

Resumen y objetivos de la tesis

El origen del uso de la energía eléctrica se remonta al final del siglo XIX, en el que las primeras máquinas producían corriente continua para alimentar los sistemas de alumbrado público. Poco tiempo después comenzaron a desarrollarse los sistemas de corriente alterna a partir de la invención del transformador y del motor de inducción. Durante un tiempo, el tradicional sistema de corriente continua, defendido por personajes de la talla de Edison y Hopkinson, compitió con el nuevo de corriente alterna, apoyado por Westinghouse y Tesla, que fue el que finalmente se impuso, constituyendo la base de los sistemas eléctricos de potencia actuales.

La ventaja de los sistemas de corriente alterna frente a los de continua residía en la posibilidad de transmitir energía a grandes distancias con pérdidas reducidas mediante la utilización de transformadores. Sin embargo, uno de los principales inconvenientes de dichos sistemas es la aparición de la potencia reactiva, consumida por las cargas que necesitaban para su funcionamiento la creación de un campo magnético, tales como los propios transformadores y los motores de inducción. En este sentido, si bien la potencia reactiva es necesaria para generar el campo magnético (sin el cual el receptor no podría funcionar), su media es nula a lo largo de un periodo, por lo que no puede transformarse en trabajo. Desde este punto de vista, el transporte de la potencia reactiva disminuye el rendimiento de la distribución de la energía eléctrica. Esta disminución se debe a que parte de la intensidad que circula por el sistema, la que es utilizada para alimentar un campo magnético, no puede ser transformada en trabajo pero genera pérdidas Joule. Este problema se ha solventado tradicionalmente mediante la instalación de baterías de condensadores en los sistemas eléctricos, cuya misión es el aporte local de la potencia reactiva, aumentándose de esta forma el rendimiento de la transmisión.

El crecimiento que la utilización de la energía eléctrica ha experimentado en la industria se ha visto reflejado en una mejora y adaptación constante de los receptores eléctricos a los nuevos requerimientos productivos, cuyo objetivo final ha sido siempre un incremento de la eficiencia. En este sentido, de vital importancia ha sido el desarrollo que ha experimentado la electrónica de potencia, y en particular, su aplicación al campo de los accionamientos eléctricos para conseguir aplicaciones de velocidad variable. Sin embargo, la utilización de la electrónica de potencia tiene como inconveniente la aparición de armónicos en el sistema de potencia, debido a que se trata de cargas no lineales.

Los problemas asociados a los armónicos son bien conocidos [5], [41] afectando a un amplio conjunto de aspectos relacionados con el sistema eléctrico, que abarca desde el aumento de las pérdidas del sistema, interferencias electromagnéticas, disparo intempestivo de protecciones, etc., hasta fenómenos de resonancia. Sin lugar a dudas, de entre todos ellos, este último es de los más problemáticos. Las resonancias se producen precisamente por la existencia en la red eléctrica de condensadores para la compensación de la potencia reactiva. Dichas resonancias generan una amplificación de las intensidades armónicas existentes en el sistema cuyo efecto puede ser devastador, debiendo ser evitadas a toda costa. Además de estos efectos perjudiciales, el sistema eléctrico con la aparición de armónicos ya no está en régimen permanente senoidal, por lo que la definición clásica de potencia reactiva no es de aplicación.

Por otra parte, un análisis actual del sector de la energía eléctrica constata que la calidad de suministro constituye hoy en día uno de los objetivos primordiales en las actividades de generación, transporte y distribución. Los procesos de liberarización del sector eléctrico llevados a cabo en multitud de países, entre los que se encuentra España, conllevan un cambio radical en la concepción del mismo. Desde esta nueva perspectiva, la energía eléctrica puede verse como un producto que las compañías distribuidoras ofrecen al consumidor final. Si bien este vínculo existente entre distribuidores y consumidores ya existía previamente, éste adquiere otra significación a partir del proceso de liberarización. En definitiva, el distribuidor tiene la obligación de entregar la energía bajo unas condiciones regladas por las autoridades [24]. Estas condiciones se pueden dividir en dos grandes grupos: continuidad de suministro y calidad de la onda de tensión. Idealmente, la tensión en los sistemas eléctricos de potencia debería ser senoidal. Sin embargo, existen circunstancias que sacan al sistema de estas condiciones de funcionamiento ideal, afectando, por tanto, a la calidad del suministro eléctrico, entre las que se pueden destacar [77]: variaciones de frecuencia, variaciones lentas de tensión, fluctuaciones de

tensión (*flicker*), huecos de tensión e interrupciones breves, impulsos de tensión, desequilibrios de tensión y distorsión armónica. Dado que los niveles de distorsión de tensión en las redes públicas de distribución de energía eléctrica está limitado [13], es lógico que, de igual forma, las compañías suministradoras elaboren recomendaciones y guías técnicas para la conexión de clientes perturbadores a la red. De esta forma, limitando el contenido armónico producido por estos, se puede ofrecer una tensión con características admisibles por la normativa vigente a otros consumidores dentro de la red de distribución.

Por tanto, ya sea para cumplir la normativa vigente o para evitar los problemas asociados a la presencia de armónicos, es de vital importancia reducir el contenido armónico producido por las cargas no lineales en las redes eléctricas, recurriéndose para ello normalmente a técnicas de filtrado de los armónicos emitidos. Los sistemas de filtrado de armónicos pueden dividirse en dos grandes grupos: activo y pasivo. Los primeros han tenido un gran desarrollo en las dos últimas décadas, debido a la rápida evolución conseguida por la electrónica de potencia, prueba de ello es la amplia bibliografía existente [42], [2], [7], [80], [8], [57], [69], [72], [88]. El principio de funcionamiento de este tipo de filtrado se basa en la inyección de corrientes armónicas de igual valor a las existentes en el sistema pero con fase contraria, de forma que la resultante es nula. El filtrado pasivo, práctica habitual en las instalaciones industriales con problemas de armónicos, consiste en la inserción en el sistema de filtros formados por bobinas dispuestas en serie con condensadores, de forma que se sintonizan a un determinado armónico que se desea eliminar.

Si bien los filtros pasivos se han venido utilizando en la industria para mitigar el contenido armónico que éstas vierten a las redes públicas de distribución, no existen procedimientos claros de diseño, sino más bien un conjunto de reglas extraídas de la experiencia, que conllevan normalmente al diseño de los mismos por procedimientos de prueba y error. Muy recientemente han aparecido en la literatura especializada criterios de diseño sistemáticos, que si bien constituyen un avance con respecto a las técnicas existentes, no han tenido en cuenta ciertos aspectos que hacen que el problema del diseño de los filtros no esté solucionado completamente.

Por estos motivos, el objeto de la presente tesis se centra en el diseño de filtros pasivos, pretendiéndose desarrollar en este trabajo un método sistemático para el diseño de los mismos. Además de conseguir una reducción de los armónicos existentes en la red, el objetivo que se pretende es la minimización de la potencia reactiva demandada por la instalación industrial.

La tesis se ha estructurado en los capítulos que se enumeran a continuación:

- En el Capítulo 2 se realiza una revisión de las definiciones de potencia para regímenes senoidales y no senoidales, poniendo de manifiesto la relación existente entre éstas y los armónicos.

- En el Capítulo 3 se presenta una revisión de las principales teorías de potencia reactiva para regímenes no senoidales, así como de los métodos de diseño de filtros pasivos.

- En el Capítulo 4 se formula el método propuesto en esta tesis para el diseño de filtros pasivos. El método desarrollado se basa en la minimización de la potencia reactiva. La función a minimizar tiene como inconveniente su carácter no lineal, asociado a la presencia de resonancias, lo cual ha llevado a un exhaustivo estudio de la misma. El procedimiento se completa con la inclusión de unas restricciones adicionales que tienen en cuenta aspectos prácticos del diseño de filtros pasivos.

- El Capítulo 5 contiene una aplicación del método desarrollado a una red de distribución concreta para poner de manifiesto la influencia de los distintos parámetros que intervienen en el proceso de optimización.

- En el Capítulo 6 se presenta la validación experimental del método de diseño desarrollado. Para ello fue necesario el montaje en el laboratorio de una red de distribución a escala, en la que la carga generadora de armónicos es un variador de velocidad.

- Por último, el Capítulo 7, recoge las principales conclusiones del trabajo desarrollado en el ámbito de la presente tesis, proponiendo asimismo futuros desarrollos y líneas de investigación.

Además los capítulos que brevemente se han expuesto, se incluye la bibliografía utilizada y dos apéndices:

- Apéndice A. En este apéndice se presenta el modelo de la carga no lineal utilizada en la validación experimental. Dicha carga es un variador de velocidad para un motor de inducción. El objeto del modelo es el cálculo de los armónicos de intensidad demandados por la carga. En dicho modelo se tienen presentes tanto los desequilibrios como los armónicos de las tensiones de alimentación al rectificador.

- Apéndice B. Se realiza una descripción detallada de la instrumentación eléctrica utilizada en la validación experimental de la tesis.

Capítulo 2

Introducción

2.1 Introducción

La corriente alterna senoidal trifásica constituye la base de la producción, transporte y distribución de la energía eléctrica. Hasta hace relativamente poco tiempo el sistema eléctrico podía describirse con suficiente aproximación mediante un modelo lineal, por lo que ante tensiones senoidales las intensidades que circulan son también senoidales y de la misma frecuencia. Sin embargo, con el aumento de la utilización de la electrónica de potencia, no sólo en el ámbito industrial sino también en el doméstico, esta afirmación ha dejado de ser cierta. Dada una tensión senoidal de una frecuencia, pueden existir en el sistema eléctrico intensidades de otras frecuencias, llamadas armónicas, que pueden influir de forma notable en los procesos industriales.

A modo de revisión, se van a presentar en este capítulo las expresiones de potencia, la definición del factor de potencia y la compensación de potencia reactiva para cada uno de los regímenes citados anteriormente, con la intención de mostrar la estrecha relación existente entre la compensación de reactiva y los armónicos.

2.2 Los armónicos en el sistema eléctrico

En general, las máquinas eléctricas son productoras de armónicos [5],[41]. Sin embargo, al ser su contenido pequeño, suelen considerarse como cargas lineales. Los armónicos aparecen en la red cuando existen cargas que son no lineales. El gran aporte de armónicos viene producido por el uso de la electrónica de potencia. En la industria, las principales fuentes de armónicos son consecuencia

de las aplicaciones de velocidad variable para motores de corriente continua y alterna. En edificios de oficinas y viviendas la iluminación y las fuentes de alimentación presentes en la mayor parte de los electrodomésticos son las principales causas de aparición de armónicos.
Los armónicos producen multitud de problemas cuando están presentes en el sistema eléctrico:

- Aumento de pérdidas en la transmisión y distribución de la energía, no sólo por el aumento del valor eficaz de la intensidad, sino por el efecto pelicular.
- Aumento de pérdidas en los transformadores de potencia. Los transformadores que van a ser utilizados en instalaciones que tienen contenido armónico son desclasificados mediante un índice (*factor K*) de forma que disminuye su potencia asignada al aumentar la distorsión armónica a la cual está expuesto, [26], [6].
- Disminución del rendimiento de motores, no sólo por el aumento de las pérdidas sino porque los armónicos de secuencia inversa provocan campos que giran en sentido contrario al del fundamental.
- Calentamiento excesivo del neutro por la circulación de terceros armónicos de secuencia homopolar.
- Interferencias.

Por estos motivos ha habido necesidad de establecer normativas que impongan límites a los contenidos armónicos de tensión e intensidad en el sistema eléctrico, considerando no sólo tasas de distorsión globales sino también de armónicos individuales [13],[73].

2.3 Potencia en sistemas de corriente alterna senoidal en régimen permanente

2.3.1 Sistemas monofásicos

Si un receptor lineal está sometido a una tensión senoidal, la intensidad que consume es también senoidal y de la misma frecuencia que la tensión:

$$u(t) = \sqrt{2}U \sin \omega t \quad i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \varphi) \tag{2.1}$$

siendo φ el ángulo de la carga. La potencia instantánea que absorbe el receptor se puede expresar como:

$$p(t) = u(t)i(t) = UI\cos\varphi(1 - \cos(2\omega t)) + UI\sin\varphi\sin(2\omega t) \tag{2.2}$$

Como se puede observar en (2.2), la potencia instantánea está formada por dos términos en cuadratura:

- El primer sumando tiene una media no nula que coincide con el valor medio de la potencia. A este valor medio se le denomina potencia activa:

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} p(t)dt = UI\cos\varphi \tag{2.3}$$

- El segundo sumando tiene una media nula. El valor de pico de este sumando es llamado potencia reactiva:

$$Q = UI\sin\varphi \tag{2.4}$$

Agrupando de forma diferente (2.2) se llega a la ecuación:

$$p(t) = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t + \varphi) \tag{2.5}$$

que consta de dos términos: uno constante, potencia activa, y otro fluctuante. La amplitud de este último se denomina potencia aparente:

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{2.6}$$

Las potencias definidas suelen representarse en diagramas fasoriales como el de la Figura 2.1.

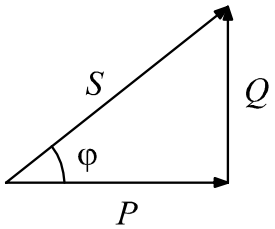


Figura 2.1: Representación fasorial de la potencia activa y reactiva.

Por otra parte, la ecuación (2.2) muestra el carácter oscilatorio de la potencia instantánea, si bien su origen tiene diferentes significados físicos [29], [28]:

- Las oscilaciones de potencia del primer sumando de (2.2) son intrínsecas a la corriente alterna y se producen siempre que existe un flujo de potencia eléctrica que puede ser convertida en trabajo.
- Las oscilaciones del segundo sumando se producen siempre y cuando exista un intercambio de energía entre componentes del sistema eléctrico que sean capaces de almacenarla (bobinas y condensadores). En el caso propuesto, dicho intercambio se efectúa entre la fuente y el receptor. Si la fuente no es ideal, es decir que tiene una impedancia en serie, este intercambio de energía que no produce trabajo estará provocando unas pérdidas en la parte resistiva de la impedancia que disminuyen el rendimiento del sistema.

La relación entre la potencia activa y la aparente se denomina factor de potencia e indica la efectividad con la que un receptor está consumiendo potencia. Para sistemas en regimen permanente senoidal, el factor de potencia coincide con el ángulo de desfase de tensión e intensidad, que a su vez es el ángulo de la carga:

$$FP = \frac{P}{S} = \cos\varphi \tag{2.7}$$

2.3.2 Sistemas trifásicos equilibrados

Para los sistemas trifásicos, la potencia instantánea total es la suma de las potencias para cada una de las fases, cuya expresión es similar a (2.2), particularizando los valores de tensión e intensidad de cada fase. Si el sistema trifásico es además equilibrado, las tensiones e intensidades constituyen sendos sistemas de magnitudes que están desfasadas $2\pi/3$ radianes entre sí, resultando que la potencia instantánea es constante:

$$p(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) = 3UI\cos\varphi \tag{2.8}$$

donde U es el valor eficaz de la tensión simple, I es el valor eficaz de la intensidad de una de las fases y φ es el ángulo de la carga, o el desfase existente entre la tensión simple y la intensidad de fase. La potencia activa se define entonces como:

$$P = 3UI\cos\varphi \tag{2.9}$$

Sin embargo, aunque el total es constante, existen oscilaciones de potencia en cada una de las fases por separado, por lo que la potencia reactiva y la aparente se definen de la siguiente forma:

$$Q = 3UI\sin\varphi \tag{2.10}$$

$$S = 3UI \tag{2.11}$$

La definición del factor de potencia en estas condiciones es idéntica a la dada para sistemas monofásicos y vuelve a estar relacionado con el desfase entre las tensiones e intensidades de la carga.

2.4 Potencia en sistemas de corriente alterna no senoidales en régimen permanente

2.4.1 Sistemas monofásicos

En el régimen permanente no senoidal, las tensiones e intensidades puede ser descompuestas en series de Fourier:

$$u(t) = \sqrt{2}\sum_k U_k \sin(k\omega t + \alpha_h) \quad i(t) = \sqrt{2}\sum_k I_k \sin(k\omega t + \alpha_h + \varphi_h) \tag{2.12}$$

por lo que la potencia instantánea es:

$$\begin{aligned} p(t) = &\sum_k U_k I_k \cos\varphi_k (1 - \cos(2k\omega t + \alpha_k)) + \\ &+ \sum_k U_k I_k \sin\varphi_k \sin(2k\omega t + \alpha_k) + \\ &+ 2\sum_{k\neq h}\sum_h U_k I_h \cos(k\omega t + \alpha_k)\cos(h\omega t + \alpha_k + \varphi_k) \end{aligned} \tag{2.13}$$

La potencia activa, que es la media de la potencia instantánea, es:

$$P = \sum_k U_k I_k \cos\varphi_k \tag{2.14}$$

El resto de términos corresponden a oscilaciones de la potencia que no tienen un claro sentido físico. Mientras que en régimen permanente senoidal las definiciones de potencia, así como su significado físico, están bien establecidas, no ocurre lo mismo con magnitudes no senoidales, para los que existen multitud de interpretaciones.

Siguiendo lo establecido en [30],[33],[32] se tienen las siguientes definiciones de potencias:

- Potencia activa:

$$P = \sum_k U_k I_k \cos \varphi_k \tag{2.15}$$

- Potencia reactiva:

$$Q = \sum_k U_k I_k \sin \varphi_k \tag{2.16}$$

- Potencia fasorial:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{2.17}$$

- Potencia aparente:

$$S_U = UI \tag{2.18}$$

$$U = \sqrt{\sum_k U_k^2} \quad I = \sqrt{\sum_k I_k^2} \tag{2.19}$$

- Potencia distorsionante:

$$D = \sqrt{S_U^2 - S^2} \tag{2.20}$$

Dando a las potencias activa, reactiva y distorsionante una dirección en el espacio según los ejes de un triedro, se tiene una representación gráfica que se muestra en la Figura 2.2.

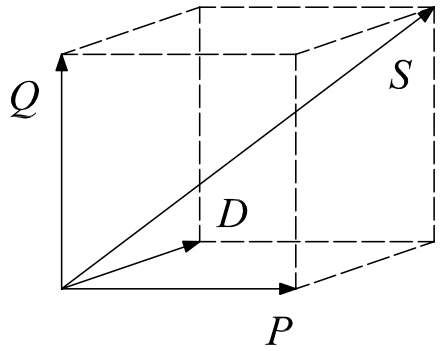


Figura 2.2: Representación vectorial de la potencia activa, reactiva, distorsionante y aparente.

La definición del factor de potencia vuelve a ser la relación existente entre la potencia activa y la aparente:

$$FP = \frac{P}{S} \tag{2.21}$$

Tal y como se mostrará en el siguiente capítulo, estas definiciones de potencia tienen poca utilidad, pues carecen de un significado físico claro y no dan información acerca de como mejorar el factor de potencia.

2.4.2 Sistemas trifásicos equilibrados

En el régimen permanente no senoidal, la potencia instantánea trifásica no es constante. Si se define una constante m que adquiere los valores 0, 1 y 2 para las fases a, b y c respectivamente, dicha potencia se puede expresar de la siguiente forma:

$$p(t) = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c = 3 \sum_k U_k I_k \cos \varphi_k + \\ + 2 \sum_m \sum_{k \neq h} \sum_h U_k I_h \sin(k(\omega t + \frac{2\pi}{3} m) + \alpha_k) \sin(h(\omega t + \frac{2\pi}{3} m) + \alpha_h + \varphi_h) \tag{2.22}$$

La potencia activa es el valor medio de la expresión anterior:

$$P = 3 \sum_k U_k I_k \cos \varphi_k \tag{2.23}$$

Las definiciones de las potencias reactiva y distorsionante trifásicas, de acuerdo con [30], corresponden a la suma de las correspondientes para las fases:

$$Q = \sum_m Q_m \quad D = \sum_m D_m \tag{2.24}$$

A partir de estas potencias, se define la potencia aparente aritmética y la vectorial como:

$$S_A = \sum_{l=a,b,c} \sqrt{P_l^2 + Q_l^2 + D_l^2} \tag{2.25}$$

$$S_V = \sum_{l=a,b,c} \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2} \tag{2.26}$$

Resulta evidente que el valor del factor de potencia dependerá de la definición de potencia aparente seleccionada.

2.5 Compensación de reactiva y armónicos

Para aumentar el rendimiento del transporte de la energía eléctrica en el régimen permanente senoidal es conveniente que los receptores tengan un factor de potencia unidad.

Tradicionalmente, el factor de potencia unidad se logra en estos casos mediante un compensador pasivo, batería de condensadores, que aporte una potencia reactiva igual a la demandada por el receptor. También se puede llegar a este estado mediante un compensador activo, sin elementos almacenadores de energía, debido a que la reactiva es una energía que se intercambia entre las fases, [1], [83].

Sin embargo, en condiciones no senoidales, se tienen dos problemas a la hora de efectuar la compensación de potencia reactiva, que pone de manifiesto la relación entre ésta y los armónicos:

- La definición de potencia reactiva en estas condiciones no está consensuada. En este sentido, se debería usar una definición que, además de tener un significado físico claro, aportase datos para el diseño del compensador que maximice el factor de potencia y el valor final de éste. A modo de ejemplo, la definición de potencia reactiva dada anteriormente no cumple con ninguno de estas características, [30].

- En caso de utilizar elementos pasivos para la compensación, normalmente baterías de condensadores, pueden aparecer en el sistema eléctrico resonancias serie o paralelo, perjudiciales para un funcionamiento correcto del sistema [5], [41], [33].

Para mitigar el efecto de estas resonancias se pueden utilizar bancos de filtros pasivos sintonizados a la frecuencia de un armónico determinado. Los filtros pasivos, además de aportar la potencia reactiva necesaria, deben contribuir a disminuir la distorsión de tensión e intensidad en el sistema. Sin embargo, la utilización de los mismos no está exenta de la aparición de resonancias, ya que pueden existir variaciones de los parámetros del filtro por envejecimiento de sus componentes, [85], y de la impedancia de red, debido a reconfiguraciones.

2.6 Resumen del capítulo

En este capítulo se ha realizado una breve descripción de los conceptos de potencia para sistemas monofásicos y trifásicos con magnitudes senoidales y no senoidales. El objeto de dicha revisión se fundamenta en la necesidad de mostrar la poca solidez de las definiciones de potencia reactiva para regímenes no senoidales como extensión de las definiciones clásicas para regímenes senoidales. Por otra parte, se ha mostrado la estrecha relación existente entre la potencia reactiva y los armónicos desde dos puntos de vista complementarios:

- La definición de potencia reactiva, por extensión del caso senoidal, debe ser tal que su compensación conlleve un aumento del factor de potencia.
- La utilización de condensadores para compensar la potencia reactiva y aumentar así el factor de potencia puede provocar peligrosas resonancias en el sistema, además de aumentar las distorsiones de tensión e intensidad.

Puesto que la extrapolación del caso senoidal no ofrece resultados satisfactorios cuando se aplica a sistemas con magnitudes distorsionadas, se hace necesario estudiar convenientemente las diferentes definiciones de potencia reactiva, así como las alternativas existentes para proceder a su compensación y a la mitigación de armónicos.

Capítulo 3

Estado del Arte

3.1 Introducción

La calidad de suministro eléctrico es de vital importancia en nuestros días. Debido a que el contenido armónico de la tensión disponible en los suministros de las compañías distribuidoras está regulada dentro de unos límites, se debe poner una cota a los niveles de intensidad armónica inyectada en el sistema por cargas no lineales. Una reducción de los armónicos se puede lograr mediante mejoras efectuadas en las cargas no lineales generadoras de los mismos, de forma que la distorsión de la intensidad consumida es menor, o bien mediante filtrado. Por otra parte, el conjunto de cargas lineales y no lineales de una industria tiene un determinado factor de potencia que debe ser compensado idealmente a la unidad para disminuir las pérdidas de distribución de la energía eléctrica y evitar así los recargos que de otra manera impondría la compañía suministradora.

La definición de potencia reactiva en régimen no senoidal, tal y como se indica en el Capítulo 2, es un tema que no está unanimemente aceptado todavía en nuestros días. Las definiciones de potencia reactiva adoptadas por instituciones como el IEEE, basada en la teoría desarrollada por Budeanu, y la IEC, basada en el trabajo de Fryze, son poco satisfactorias, dado que ni tienen un significado físico claro ni aportan datos relevantes para diseñar dispositivos que ayuden a aumentar el factor de potencia.

Si desea aumentarse el factor de potencia mediante la adición de baterías de condensadores, extrapolando del caso senoidal, aumentan los armónicos tanto de tensión como de intensidad y además crece el riesgo de resonancia. Por estos motivos, para aumentar el factor de potencia en sistemas no senoidales, se utilizan filtros, ya sean pasivos, activos o híbridos. Independientemente del

sistema de filtrado utilizado, éste deberá tener una doble función: aumentar el factor de potencia tanto como sea posible y reducir el contenido de armónicos inyectados a la red a un valor adecuado.

Por estos motivos, en el presente capítulo se hace una revisión de las teorías de potencia reactiva en régimen no senoidal más relevantes y de las principales técnicas de diseño de filtros pasivos, objeto de esta tesis, presentes en la literatura especializada.

3.2 Definiciones de potencia reactiva en sistemas no senoidales

Las teorías que van a ser revisadas se pueden agrupar dentro de dos grandes grupos dependiendo del tipo de sistema al cual se aplican: monofásico o trifásico. Dentro de cada uno de éstos se puede establecer otra división en función del dominio en el que han sido formuladas: frecuencia y tiempo.

Todas ellas tiene en común que intentan realizar una descomposición ortogonal de intensidades similar al caso senoidal. Dada una magnitud periódica $f_i(t)$ de frecuencia fundamental ω, se puede expresar mediante su desarrollo de Fourier:

$$f_i = F_{i0} + Re \sum_n \boldsymbol{F}_{in} e^{jn\omega t} \tag{3.1}$$

donde $\boldsymbol{F}_{in}$ es un fasor cuyo módulo es el valor eficaz del armónico n:

$$\boldsymbol{F}_{in} = F_{in} e^{j\alpha_n} = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T f_i(t) e^{-jn\omega t} dt \tag{3.2}$$

Se dice que una magnitud $f_j(t)$ periódica es ortogonal a $f_i(t)$, si su producto escalar es nulo, lo cual se puede expresar en el dominio del tiempo y de la frecuencia:

$$\begin{aligned} (f_i, f_j) &= \frac{1}{T} \int_0^T f_i f_j dt = \\ &= F_{i0} F_{j0} + Re \sum_n \boldsymbol{F}_{in} \boldsymbol{F}^*_{jn} = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Si la suma de las magnitudes anteriores forma una tercera $f(t)$, se verifica la siguiente relación de valores eficaces:

$$F^2 = F_i^2 + F_j^2 \tag{3.4}$$

De esta forma, la reducción del valor eficaz $f_i(t)$ o $f_j(t)$ conlleva una disminución del valor eficaz de $f(t)$.

Si se realiza una descomposición ortogonal de intensidad de forma que, mediante algún tipo de compensación, se reduzca alguna de sus componentes, al tener cada una de dichas intensidades una potencia asociada se incrementa el valor del factor de potencia.

3.2.1 Sistemas monofásicos

3.2.1.1 Dominio de la frecuencia

La expresión de la potencia activa, común para todas las descomposiciones de potencia que van a ser analizadas, en el dominio de la frecuencia es:

$$P = \sum_k U_k I_k \cos \varphi_k \tag{3.5}$$

Igualmente la potencia aparente es:

$$S = UI = \sqrt{\sum_k U_k^2} \sqrt{\sum_k I_k^2} \tag{3.6}$$

3.2.1.1.1 Budeanu

La descomposición de Budeanu [10] es la adoptada en [30] por el IEEE. La potencia reactiva se define por la expresión:

$$Q = \sum_k U_k I_k \sin \varphi_k \tag{3.7}$$

De esta forma, se define la potencia distorsionante como:

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \tag{3.8}$$

Esta definición de potencia reactiva no guarda ninguna relación con el flujo de potencia que se establece entre la fuente y la carga con media nula. Además, no da información acerca de como mejorar el factor de potencia de la carga, [17], [20], [16], [65], [66], [67], [68], [28]. De hecho, es posible que al compensar la potencia reactiva siguiendo la definición anterior, el factor de potencia disminuya, debido a que se produzca un incremento de la potencia distorsionante.

La debilidad de esta teoría se basa en una inadecuada descomposición de intensidades y definición de potencia reactiva. Las intensidades activa y reactiva definen unas potencias cuya suma es la potencia instantánea:

$$i_a = \sqrt{2}\sum_k I_k \cos\varphi_k \sin(k\omega t + \alpha_k) \Rightarrow p_a(t) \tag{3.9}$$

$$i_r = \sqrt{2}\sum_k I_k \sin\varphi_k \cos(k\omega t + \alpha_k) \Rightarrow p_r(t) \tag{3.10}$$

$$p(t) = p_a(t) + p_r(t) \tag{3.11}$$

La potencia instantánea $p_r(t)$ que resulta de la intensidad reactiva $i_r(t)$ está formada por dos sumandos:

$$\begin{aligned} p_r &= \sum_k U_k I_k \sin\varphi_k \sin 2(k\omega t + \alpha_k) + \\ &+ 2\sum_k \sum_{l\neq k} U_k I_l \sin\varphi_l \sin(k\omega t + \alpha_k)\sin(l\omega t + \alpha_l) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Denominar potencia reactiva al primer término de (3.12) es inadecuado. De esta forma, la potencia distorsionante, como magnitud derivada de P, Q y S, carece de sentido.

3.2.1.1.2 Zakikhani y Shepherd

El caso más general que se puede plantear en un sistema que presenta armónicos de tensión e intensidad es aquel en el que pueden existir órdenes de armónicos de tensión que no coincidan con los de intensidad, órdenes de armónicos de tensión e intensidad coincidentes y órdenes de armónicos de intensidad que no estén presentes en los de tensión. Cada uno de estos órdenes de armónicos establecen los conjuntos $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{P}$ respectivamente, en función de los que se realiza la siguiente descomposición de la potencia aparente, [65]-[68]:

$$S^2 = S_R^2 + S_X^2 + S_D^2 \tag{3.13}$$

$$S_R^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} U_k^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} I_k^2 \cos^2\varphi_k \tag{3.14}$$

$$S_X^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} U_k^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} I_k^2 \sin^2\varphi_k \tag{3.15}$$

$$S_D^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} U_k^2 \sum_{k\in\mathbb{P}} I_k^2 + \sum_{k\in\mathbb{M}} U_k^2 \sum_{k\in\mathbb{P}} I_k^2 + \sum_{k\in\mathbb{M}} U_k^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} I_k^2 \tag{3.16}$$

El único término compensable mediante elementos almacenadores de energía es S_X; minimizando éste se alcanzará el máximo factor de potencia.

Por otra parte, aunque las formulaciones de los distintos componentes de la potencia puede resultar parecida a los desarrollados por Budeanu, no existe en realidad ninguna conexión entre S_R y la potencia activa P, ni entre S_X y la potencia reactiva Q, ni entre S_D y la potencia distorsionante D.

3.2.1.1.3 Sharon

Esta descomposición, [62] y [63], se basa en la anterior de Zakikhani y Shepherd, [65]-[68]. Sharon indica que la función S_X es discontinua, por lo que se puede llegar a valores del factor de potencia mayores que el inicial después de que la compensación haya sido realizada.

Si de nuevo se engloban a los armónicos de tensión e intensidad en los conjuntos designados en la sección anterior ($\mathbb{N}$ armónicos comunes a tensión e intensidad, $\mathbb{M}$ armónicos de tensión no presentes en intensidad y $\mathbb{P}$ armónicos de intensidad no presentes en la tensión), se propone:

$$S^2 = P^2 + S_Q^2 + S_C^2 \tag{3.17}$$

$$P = \sum_{k\in\mathbb{N}} U_k I_k cos\varphi_k \tag{3.18}$$

$$S_Q = U \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} I_k^2 cos^2\varphi_k \right\}^{1/2} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} S_C &= \{\sum_{k\in\mathbb{M}} U_k^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} I_k^2 cos^2\varphi_k + U^2 \sum_{k\in\mathbb{P}} I_k^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} (U_k I_l \cos\varphi_l - U_l I_k \cos\varphi_k)^2\}^{1/2} \end{aligned} \tag{3.20}$$

donde P es la potencia activa, S_Q es la potencia reactiva en cuadratura y S_C es la potencia reactiva complementaria. El término S_Q es igual a S_X, definido en [65], salvo un sumando que pertenece a la potencia S_D. Sin embargo, según Shepherd y Zakikhani, este sumando no tiene naturaleza de potencia reactiva, ya que no puede ser compensado mediante un elemento pasivo almacenador de energía, siendo sólo un artificio matemático para asegurar la continuidad de la potencia reactiva [67].

3.2.1.1.4 Slonim y Van Wyk

Estos autores, [70] y [71], critican la falta de significado físico de las componentes de potencia definidas en [10], si bien no dejan claro en sus trabajos el significado de las mismas, limitándose sólo a establecer unas expresiones matemáticas que ligan aquellas con los parámetros de la carga.

Considérese el caso más general, en el que los armónicos de tensión están contenidos en los conjuntos $\mathbb{M}$ y $\mathbb{N}$ y los de intensidad en $\mathbb{N}$ y $\mathbb{P}$. Para los armónicos comunes a tensión e intensidad, $\mathbb{N}$, se puede definir una impedancia para cada orden de armónico en dicho conjunto:

$$Z_k = R + jX_k = \frac{U_k}{I_k} \quad k \in \mathbb{N} \tag{3.21}$$

a partir de las cuales se expresan las potencias relacionadas con los armónicos contenidos en $\mathbb{N}$: activa, reactiva y distorsionante:

$$P^2 = R^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} I_k^4 \tag{3.22}$$

$$Q^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} X_k^2 I_k^4 \tag{3.23}$$

$$D_c^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{N}} (X_k - X_l)^2 I_k^2 I_l^2 \tag{3.24}$$

Tal y como se deduce de estas ecuaciones, si sólo existen armónicos en el conjunto $\mathbb{N}$, la potencia distorsionante tiene una carácter puramente reactivo. Los componentes de potencia resultantes de términos cruzados entre armónicos de diferentes conjuntos, que se agrupan bajo la potencia distorsionante imaginaria D_i, pueden dividirse en una parte activa y otra reactiva:

$$\begin{aligned} D_i^2 = R^2 \Big[&\sum_{k\in\mathbb{M}} \sum_{l\in\mathbb{N}} I_k^2 I_l^2 + \sum_{k\in\mathbb{M}} \sum_{l\in\mathbb{P}} I_k^2 I_l^2 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{P}} I_k^2 I_l^2 \Big] + \\ &+ \sum_{k\in\mathbb{M}} \sum_{l\in\mathbb{N}} X_k^2 I_k^2 I_l^2 + \sum_{k\in\mathbb{M}} \sum_{l\in\mathbb{P}} X_k^2 I_k^2 I_l^2 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{l\in\mathbb{P}} X_k^2 I_k^2 I_l^2 = \\ &= P_i^2 + Q_i^2 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Con estas definiciones, la potencia aparente se puede expresar o bien a partir de las potencias activa, reactiva, distorsionante y distorsionante imaginaria, o, dado que para cada una de ellas se ha hecho una descomposición en parte

activa y reactiva, como suma de términos activos y reactivos:

$$\begin{aligned} S^2 &= P^2 + Q^2 + D_c^2 + D_i^2 = \\ &= P^2 + P_i^2 + Q^2 + D_c^2 + Q_i^2 = \\ &= P_\sigma^2 + Q_\sigma^2 \end{aligned} \tag{3.26}$$

La teoría expuesta no aporta puntos de vista alternativos a los presentados hasta el momento, y arrastra deficiencias de otras anteriores:

- El significado físico de los diferentes términos de la potencia reactiva y distorsionante no es claro.
- No se indican qué términos pueden ser compensados para aumentar el factor de potencia.

3.2.1.1.5 Czarnecki

Este autor propone una descomposición ortogonal de intensidades en un sistema en el que los armónicos de tensión pertenecen a un grupo N_u y los de intensidad a N_i, de forma que existen armónicos en N_i no presentes en N_u [15], [16].

Si se separan en $i_g(t)$ a los armónicos de intensidad no contenidos en la tensión, y en $i_o(t)$ a los contenidos en tensión e intensidad, la siguiente descomposición es ortogonal, pues se trata de armónicos de diferente frecuencia:

$$i(t) = i_o(t) + i_g(t) \tag{3.27}$$

La intensidad $i_o(t)$ se puede descomponer en otras intensidades que son ortogonales entre sí. Se define una intensidad activa que tiene la misma forma de onda que la tensión:

$$i_a(t) = G_e u(t) \tag{3.28}$$

G_e es la conductancia equivalente que consumiría la potencia que está demandando la carga con la tensión $u(t)$:

$$G_e = \frac{P}{U^2} \tag{3.29}$$

La intensidad restante, $i - i_a$, puede ser descompuesta en dos, dispersa y reactiva:

$$i_s(t) = \sqrt{2} \sum_k (G_k - G_e) U_k \cos(k\omega t) \tag{3.30}$$

$$i_r(t) = \sqrt{2} \sum_k B_k U_k \sin(k\omega t) \tag{3.31}$$

Todos estos componentes de intensidad son ortogonales, por lo que se verifica:

$$I^2 = I_a^2 + I_r^2 + I_s^2 + I_g^2 \tag{3.32}$$

Así, la disminución de uno de ellos implica una disminución del valor eficaz de la intensidad eficaz, aumentando el factor de potencia. Multiplicando los valores eficaces anteriores por el de la tensión se obtienen las potencias asociadas a cada una de la intensidades, que toman el nombre de éstas.

Los significados físicos de las intensidades y sus potencias asociadas se explican de la siguiente forma:

- Intensidad activa. Es la necesaria para transferir la potencia activa P hasta la carga.
- Intensidad dispersa. Centrándose en un armónico $i_n(t)$, la intensidad que es necesaria para transportar la potencia activa a la conductancia equivalente es la intensidad activa, pero en realidad está circulando otra cantidad:

  $$i_{Rn} = \sqrt{2} G_n U_n \cos(n\omega t) \tag{3.33}$$

  La diferencia entre las dos magnitudes es la intensidad dispersa que, aunque no contribuye al transporte de potencia activa, aumenta el valor eficaz de la intensidad y disminuye el factor de potencia. Por otra parte, dado que los valores $G_e - G_n$ pueden ser positivos o negativos, no pueden compensarse mediante un elemento pasivo.
- Intensidad reactiva. Aparece siempre que haya un desfase entre la tensión y la intensidad de la carga. Esta intensidad puede minimizarse mediante elementos pasivos.

3.2.1.2 Dominio del tiempo

3.2.1.2.1 Fryze

La principal objeción de Fryze, [34]-[35], a la teoría desarrollada por Budeanu es la necesidad de realizar la descomposición de las tensiones e intensidades antes de calcular la potencia reactiva. Su definición de potencia reactiva es la adoptada por la Comisión Electrotécnica Internacional (*IEC*).

Fryze descompone la intensidad en dos componentes ortogonales:

$$i(t) = i_a(t) + i_b(t) \tag{3.34}$$

El primero de ellos es el responsable del transporte de la potencia activa, teniendo la misma forma de onda de la tensión:

$$i_a = \frac{P}{U^2} u(t) \tag{3.35}$$

$$i_b = i - i_a \tag{3.36}$$

Al ser estas dos intensidades ortogonales los valores eficaces satisfacen la siguiente ecuación:

$$I^2 = I_a^2 + I_b^2 \tag{3.37}$$

La potencia reactiva es la asociada a la intensidad i_b:

$$Q = UI_b \Rightarrow S^2 = P^2 + Q^2 \tag{3.38}$$

El principal inconveniente de esta definición es que Q no tiene ninguna relación con las propiedades de la carga, por lo que ni se tiene ninguna información de por qué existe ni de cómo se puede compensar [16].

3.2.1.2.2 Kusters y Moore

Se realiza una descomposición de la potencia aparente en potencia activa, reactiva y reactiva residual [44]. Tomando la tensión como referencia se tienen las siguientes intensidades:

- Activa. Es la que tiene la misma forma que la tensión y es la responsable de la aparición de la potencia activa:

$$i_p = \frac{P}{U^2} u = \left(\frac{1}{T} \int_0^T uidt \right) \frac{u}{U^2} \qquad I_p = \frac{P}{U} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T uidt \right) \frac{1}{U} \tag{3.39}$$

- Reactiva. Es la que resulta de restar la intensidad activa a la total:

$$i_q = i - i_p \qquad I_q = \sqrt{I^2 - I_p^2} \tag{3.40}$$

  Esta intensidad resultante se puede dividir en dos componentes: inductiva o capacitiva y residual. Las componentes inductiva y capacitiva se definen de la siguiente forma:

  - Inductiva. Componente que tiene la misma forma de onda que la intensidad que circula por una bobina con la misma tensión aplicada. Denominando $\bar{u}$ a la integral indefinida de la tensión y $\bar{U}$ a su valor eficaz:

$$i_{ql} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}idt \right) \frac{\bar{u}}{\bar{U}^2} \qquad I_{ql} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}idt \right) \frac{1}{\bar{U}} \tag{3.41}$$

– Capacitiva. Esta intensidad tiene la misma forma de onda que la que circula por un condensador sometido a la tensión aplicada. Si se llama $\dot{u}$ a la derivada de la tensión y $\dot{U}$ a su valor eficaz:

$$i_{qc} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T \dot{u}i dt\right)\frac{\dot{u}}{\dot{U}^2} \qquad I_{qc} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T \dot{u}i dt\right)\frac{1}{\dot{U}} \tag{3.42}$$

- Residual. Se obtiene de restar a la intensidad total la intensidad activa y reactiva. Puede ser inductiva o capacitiva, en función de la intensidad reactiva elegida:

$$i_{qlr} = i - i_p - i_{ql} \qquad I_{qlr} = \sqrt{I^2 - I_p^2 - I_{ql}^2} \tag{3.43}$$

$$i_{qcr} = i - i_p - i_{qc} \qquad I_{qcr} = \sqrt{I^2 - I_p^2 - I_{qc}^2} \tag{3.44}$$

Las intensidad reactiva, ya sea inductiva o capacitiva, puede ser compensada completamente mediante un condensador o una bobina. De hecho, los valores del condensador coinciden con aquellos calculados usando una adecuada formulación de la potencia reactiva en el dominio de la frecuencia. El problema fundamental que se presenta es que las definiciones dadas se circunscriben a la compensación del factor de potencia mediante bobinas o condensadores [56] y [16].

3.2.1.2.3 Page

La definición que realiza de las intensidades es idéntica a la propuesta por Kusters y Moore, si bien añade ciertos aspectos que éstos no tienen en cuenta para el caso de compensación de potencia reactiva mediante elementos pasivos en sistemas con tensión no senoidal [56]. Para este caso, la intensidad reactiva inductiva y capacitiva no tienen por qué ser iguales, por lo que es posible mejorar la compensación de potencia reactiva utilizando una definición de esta intensidad que contenga a la vez a ambos términos:

$$i_q = a\frac{du}{dt} + b\int u dt + i_r \tag{3.45}$$

donde los coeficientes a y b se eligen de forma que el valor eficaz de la intensidad residual se minimice. Los coeficientes toman por tanto este valor:

$$a = \frac{I_{qc}}{\dot{U}} \quad b = \frac{I_{ql}}{\bar{U}} \tag{3.46}$$

De esta forma se consigue una posibilidad de compensación de energía reactiva mediante elementos pasivos. Si los coeficientes a y b anteriormente calculados son negativos, los valores del condensador y bobina en paralelo que se tienen que añadir para anular la componente reactiva son:

$$C = -a \quad L = -\frac{1}{b} \tag{3.47}$$

3.2.1.3 Resumen de las descomposiciones de potencia

En la Tabla 3.1 se muestran los aspectos más relevantes de las descomposiciones que han sido tratadas en los apartados anteriores.

Tabla 3.1: Resumen de las descomposiciones de potencia.

Teoría	Compensación Q aumenta FP	Significado físico	Objeciones
Frecuencia			
Budeanu	No	No	Definiciones de Q y D
Zakikhani Shepherd	Sí	No	S_R formada por P y D S_X no continua
Sharon	Sí	No	Parte de S_Q no compensable
Slonim	No	No	Definición de Q Terminología
Czarnecki	Sí	Sí	-
Tiempo			
Fryze	No	No	No se conoce por qué hay Q
Kusters Moore	Sí	Sí	Compensación sólo con condensadores o bobinas
Page	Sí	Sí	-

3.2.2 Sistemas trifásicos

Las descomposiciones de potencia monofásica, tratadas anteriormente, podrían ser utilizadas para el caso trifásico siempre y cuando éste fuese equilibrado. Sin embargo, existen razones para utilizar otro tipo de descomposición para este tipo de sistemas:

- Los circuitos desequilibrados en carga y tensiones no podrían ser analizados.

- En el caso senoidal la potencia instantánea es constante, es decir, no existe fluctuación de potencia global entre la fuente y la carga. Sin embargo, esta fluctuación existe en cada una de las fases. Por este motivo la potencia reactiva sigue siendo de utilidad para evaluar la eficiencia de la transferencia de energía. Dicha potencia se compensa tradicionalmente mediante elementos almacenadores de energía, condensadores o bobinas, para aumentar el factor de potencia.

  Por otra parte, es interesante observar que las oscilaciones de potencia debidas a la potencia reactiva tienen igual amplitud en cada una de las fases y existe un desfase de $2\pi/3$ radianes entre ellas. Esto implica que la potencia reactiva en una de las fases es la suma de las potencias reactivas de las otras dos. Es decir, que, de forma instantánea, se produce entre las fases un intercambio de potencia reactiva. Por tanto, para compensar esta reactiva, no tendríamos por qué tener un elemento almacenador de energía, tal y como ocurría en el caso monofásico. Dicho compensador, que ha de ser activo, debería tomar la potencia reactiva de dos de las fases e inyectarla en la otra. Esta es la idea en la que se basa la teoría de la potencia reactiva instantánea [1],[83]. En el caso de utilizar extensiones del caso monofásico, se estaría perdiendo este importante aspecto de la transmisión de potencia de los sistemas trifásicos, que introduce la idea de la compensación activa sin elementos almacenadores de energía.

Las principales teorías que han sido desarrolladas se pueden dividir en dos: sistemas trifásicos sin conductor neutro (tres hilos) y sistemas trifásicos con neutro (cuatro hilos), si bien estas últimas no se encuentran todavía completamente cerradas.

3.2.2.1 Sistemas trifásicos de tres hilos

3.2.2.1.1 Czarnecki

Este autor propone una descomposición ortogonal de intensidades análoga a la realizada en el caso monofásico, pero aplicada al trifásico, [18]. En concreto, se analiza una carga trifásica no lineal con desequilibrio, alimentada mediante una tensión no senoidal equilibrada. Las magnitudes en cada una de las fases se pueden expresar en serie de Fourier mediante una expresión similar a la ecuación (3.1). Agrupando las magnitudes de cada una de las fases se obtiene

un vector:

$$\boldsymbol{f} = [f_R, f_S, f_T]^t \tag{3.48}$$

Los vectores así definidos forman un espacio $\mathbb{L}^2$, en el que se pueden establecer las siguientes operaciones:

- Producto escalar entre dos vectores $\boldsymbol{f}_i$ y $\boldsymbol{f}_j$:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j) &= \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}_i^t \boldsymbol{f}_j dt = \\ &= Re \sum_k \left(\boldsymbol{F}_{ikR}\boldsymbol{F}^*_{jkR} + \boldsymbol{F}_{ikS}\boldsymbol{F}^*_{jkS} + \boldsymbol{F}_{ikT}\boldsymbol{F}^*_{jkT}\right)\end{aligned} \tag{3.49}$$

- Norma de un vector $\boldsymbol{f}$:

$$\| \boldsymbol{f} \| = \sqrt{(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f})} = \sqrt{\sum_k (F_{kR}^2 + F_{kS}^2 + F_{kT}^2)} \tag{3.50}$$

  Esta norma puede entenderse como un valor eficaz generalizado, equivalente a una cantidad en corriente continua que tiene el mismo efecto térmico que en el sistema trifásico las cantidades f_R, f_S y f_T.

Dos vectores $\boldsymbol{f}_i$ y $\boldsymbol{f}_j$ son ortogonales si su producto escalar es cero:

$$(\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j) = 0 \tag{3.51}$$

en cuyo caso cumplen la siguiente relación de normas:

$$\| \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{f}_j \|^2 = \| \boldsymbol{f}_i \|^2 + \| \boldsymbol{f}_j \|^2 \tag{3.52}$$

Si los armónicos de tensión están incluidos en el conjunto N_u, al ser la carga no lineal, la intensidad de la fuente contendrá armónicos de este conjunto más los producidos por la carga, contenidos en el conjunto N_i, que no están presentes en N_u. Por tanto, la intensidad puede descomponerse en dos componentes ortogonales por tratarse de armónicos de diferente frecuencia:

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_o + \boldsymbol{i}_g \tag{3.53}$$

donde $\boldsymbol{i}_o$ es la componente con armónicos en el conjunto N_u e $\boldsymbol{i}_g$ es la componente con armónicos en el conjunto N_i.

Dada la potencia activa y reactiva de la carga para una armónico, puede calcularse la conductancia y susceptancia equivalentes de una carga simétrica que tuviera las mismas potencias que ésta:

$$G_{ne} = \frac{P_n}{\| \boldsymbol{u}_n \|} \quad , \quad B_{ne} = \frac{Q_n}{\| \boldsymbol{u}_n \|} \tag{3.54}$$

Con estos parámetros, la intensidad $\boldsymbol{i}_o$ puede descomponerse en sus componentes activa, dispersa, reactiva y de desequilibrio:

$$\boldsymbol{i}_a = G_e \boldsymbol{u} \qquad G_e = \frac{P}{\| \boldsymbol{u} \|} \tag{3.55}$$

$$\boldsymbol{i}_s = \sum_{k \in N_u} G_{ke} \boldsymbol{u}_k - G_e \boldsymbol{u} \tag{3.56}$$

$$\boldsymbol{i}_r = \sum_{k \in N_u} j B_{ke} \boldsymbol{u}_k \tag{3.57}$$

$$\boldsymbol{i}_u = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{i}_a - \boldsymbol{i}_s - \boldsymbol{i}_r \tag{3.58}$$

Al ser estas componentes ortogonales, se verifica:

$$\| \boldsymbol{i} \|^2 = \| \boldsymbol{i}_a \|^2 + \| \boldsymbol{i}_s \|^2 + \| \boldsymbol{i}_r \|^2 + \| \boldsymbol{i}_u \|^2 \tag{3.59}$$

Resulta evidente que la última intensidad es la que aparece en el caso de que la carga fuese desequilibrada. En caso contrario la intensidad $\boldsymbol{i}_o$ que demandaría la carga sería:

$$\boldsymbol{i}_o = \sum_{k \in N_u} (G_k + j B_k) \, \boldsymbol{u} \tag{3.60}$$

y las intensidades activa más dispersa y la reactiva:

$$\boldsymbol{i}_a + \boldsymbol{i}_s = \sum_{k \in N_u} G_k \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{i}_r = \sum_{k \in N_u} j B_k \boldsymbol{u} \tag{3.61}$$

por lo que se verifica que:

$$\boldsymbol{i}_u = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{i}_a - \boldsymbol{i}_s - \boldsymbol{i}_r = 0 \tag{3.62}$$

3.2.2.1.2 Akagi

Este autor propone la teoría de la potencia reactiva instantánea, [1]. Dado un sistema trifásico, en el que por simplicidad se excluyen las componentes de secuencia cero, se define el cambio de coordenadas siguiente:

$$\begin{bmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3/2} & -\sqrt{3/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

$$\boldsymbol{f}_{\alpha\beta} = T\boldsymbol{f}_{abc} \tag{3.64}$$

siendo $\boldsymbol{f}_{abc}$ tensiones o intensidades de fase del sistema trifásico, $\boldsymbol{f}_{\alpha\beta}$ la transformación de las mismas en el nuevo sistema de coordenadas $\alpha\beta$ y T la matriz de cambio de coordenadas. Puede observarse que la transformación realizada es la de Park, por lo que, en ausencia de componente homopolar, el sistema trifásico puede ser representado sólo mediante las dos magnitudes en los ejes $\alpha - \beta$, siendo éstos ortogonales.

La potencia instantánea se define en las nuevas coordenadas como:

$$p = \boldsymbol{e}_a\boldsymbol{i}_a + \boldsymbol{e}_b\boldsymbol{i}_b + \boldsymbol{e}_c\boldsymbol{i}_c = \boldsymbol{e}_\alpha\boldsymbol{i}_\alpha + \boldsymbol{e}_\beta\boldsymbol{i}_\beta \tag{3.65}$$

La potencia reactiva instantánea q, es el módulo del vector de potencia instantánea imaginaria $\boldsymbol{q}$, definido como:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{e}_\alpha \times \boldsymbol{i}_\beta + \boldsymbol{e}_\beta \times \boldsymbol{i}_\alpha \tag{3.66}$$

$$q = e_\alpha i_\beta - e_\beta i_\alpha \tag{3.67}$$

Por tanto, la potencia activa y reactiva instantáneas se pueden expresar según:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\alpha & e_\beta \\ -e_\beta & e_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

Invirtiendo la relación (3.68), se obtiene una expresión de las intensidades que puede separarse en dos sumandos dependiendo de la potencia activa y reactiva instantáneas respectivamente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e_\alpha & e_\beta \\ -e_\beta & e_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_\alpha & e_\beta \\ -e_\beta & e_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} i_{\alpha p} \\ i_{\beta p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{\alpha q} \\ i_{\beta q} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.69}$$

La potencia activa instantánea (3.65), es la suma de las potencias en cada uno de los ejes $\alpha\beta$, que puede expresarse en función de las intensidades de (3.69):

$$p = p_\alpha + p_\beta = e_\alpha i_\alpha + e_\beta i_\beta = e_\alpha i_{\alpha p} + e_\beta i_{\beta p} = p_{\alpha p} + p_{\beta p} \tag{3.70}$$

verificándose además que:

$$0 = e_\alpha i_{\alpha q} + e_\beta i_{\beta q} = p_{\alpha q} + p_{\beta q} \tag{3.71}$$

Es decir, que las potencias $p_{\alpha q}$ y $p_{\beta q}$, que aparecen por la existencia de la potencia imaginaria instantánea, no contribuyen al flujo de potencia activa, ya que se cancelan mutuamente. La novedad de esta teoría se basa en el diseño de compensadores activos sin almacenamiento de energía que eliminan los términos que depende de la potencia imaginaria instantánea: $p_{\alpha q}$ y $p_{\beta q}$. En [1], el autor hace la extensión a casos en los que se encuentre presente la componente homopolar, incluyendo su potencia $e_0 i_0$ dentro de la potencia instantánea que, como posteriormente se comprobará es inadecuada, [83].

3.2.2.1.3 Willems

La teoría de Willems, [83], se basa en una nueva interpretación de la teoría de Akagi. Se afirma que no es necesario realizar un cambio de coordenadas para calcular las potencias instantáneas activa y reactiva, pudiendo estas ser calculadas a partir de tensiones e intensidades en las fases. Así, dados los vectores de tensión, $\boldsymbol{u}(t)$, e intensidad, $\boldsymbol{i}(t)$, la potencia instantánea es el producto escalar de ambos:

$$p(t) = \boldsymbol{u}(t)^t \boldsymbol{i}(t) \tag{3.72}$$

Si $\boldsymbol{i}_p(t)$ es la proyección ortogonal de la intensidad $\boldsymbol{i}(t)$ sobre el vector de tensión $\boldsymbol{u}(t)$, se debe verificar:

$$\boldsymbol{u}(t)^t \boldsymbol{i}(t) = \boldsymbol{u}(t)^t \boldsymbol{i}_p(t) \tag{3.73}$$

por lo que el término $\boldsymbol{i}_p(t)$ es el responsable de la transmisión de la potencia $p(t)$, y se puede expresar a partir de ésta:

$$\boldsymbol{i}_p(t) = \frac{\boldsymbol{u}(t)^t \boldsymbol{i}(t)}{|\boldsymbol{u}(t)|} \boldsymbol{u}(t) = \frac{p(t)}{|\boldsymbol{u}(t)|} \boldsymbol{u}(t) \tag{3.74}$$

La componente no activa de la intensidad, que no contribuye a la transmisión de potencia, es:

$$\boldsymbol{i}_q(t) = \boldsymbol{i}(t) - \boldsymbol{i}_p(t) \tag{3.75}$$

y además es ortogonal al vector de tensión:

$$\boldsymbol{v}(t)^t \boldsymbol{i}_q(t) = 0 \tag{3.76}$$

La potencia imaginaria instantánea puede ser asociada a la cantidad:

$$|q(t)| = |\boldsymbol{v}(t)||\boldsymbol{i}_q(t)| \tag{3.77}$$

Los sistemas trifásicos sin secuencia homopolar pueden ser representados mediante dos variables, teniéndose una representación bidimensional del problema. En este caso, a la potencia imaginaria instantánea $|q(t)|$ se le puede asociar un signo, estando entonces ligada con el producto vectorial de tensión e intensidad, tal y como fue definido en [1] por Akagi. Con este nuevo punto de vista, no existe ningún problema a la hora de tratar la componente homopolar y, como puede demostrarse, estará contenida tanto en la potencia activa como en la imaginaria instantánea.

3.2.2.1.4 Ferrero y Superti-Furga

Estos autores aplican la transformación de Park a sistemas trifásicos de tres hilos para obtener una descomposición de los términos de potencia más general que la propuesta por Akagi, [31].

Dadas unas magnitudes del sistema trifásico, se define la transformación de Park como:

$$\boldsymbol{y}_{dqo} = T\boldsymbol{y}_{abc} \tag{3.78}$$

donde T es la matriz ortogonal:

$$T = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \tag{3.79}$$

En ausencia de componente homopolar, el sistema trifásico puede definirse mediante el vector de Park:

$$\boldsymbol{y}(t) = y_d + jy_q \tag{3.80}$$

Si las señales son periódicas, este vector puede descomponerse en una serie compleja de Fourier:

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{Y}_k e^{jk\omega t} \tag{3.81}$$

Cada sumando es un vector de Park, $\boldsymbol{Y}_k$, con amplitud constante, Y_k, que gira a una velocidad proporcional a su orden de armónico respecto al fundamental. Cada frecuencia armónica está formada por dos componentes, positiva y negativa, que giran a la misma velocidad pero con sentidos contrarios. El término positivo está asociado con el fasor de la componente directa del armónico, $\vec{Y}_{1k}$, mientras que el negativo lo está con el conjugado del fasor de la inversa, $\vec{Y}_{2k}$:

$$\boldsymbol{Y}_k = \vec{Y}_{1k} \quad k > 0 \quad \boldsymbol{Y}_k = \vec{Y}^*_{2k} \quad k < 0 \tag{3.82}$$

La potencia instantánea compleja de Park se puede definir como:

$$\boldsymbol{a}_p(t) = p_p(t) + jq_p(t) = \boldsymbol{u}(t)\boldsymbol{i}^*(t) \tag{3.83}$$

donde:

$$p_p(t) = Re\left[\boldsymbol{a}_p(t)\right] = u_d i_d + u_q i_q \tag{3.84}$$

$$q_p(t) = Im\left[\boldsymbol{a}_p(t)\right] = u_q i_d - u_d i_q \tag{3.85}$$

La potencia reactiva instantánea de Park, $q_p(t)$, puede ser compensada completamente mediante elementos activos no almacenadores de energía y tiene el mismo valor que el módulo de la potencia instantánea imaginaria definida en [1] por Akagi.

Si en lugar de expresar los términos de potencia de Park en función de las magnitudes temporales de tensión e intensidad, se hace en función de sus desarrollos en serie, se llega a otra expresión de la potencia:

$$\boldsymbol{a}_p(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{U}_k \boldsymbol{I}_k^* + \sum_{k \neq h} \boldsymbol{U}_k \boldsymbol{I}_h^* e^{j(k-h)\omega t} \tag{3.86}$$

Definida la potencia instantánea de Park en función de los armónicos de tensión e intensidad, es posible obtener el valor medio de la misma, que será una magnitud compleja, mediante la integración en un periodo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_p(t) &= P_p + jQ_p = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{u}(t)\boldsymbol{i}^*(t)dt = \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{U}_k \boldsymbol{I}_k^* \end{aligned} \tag{3.87}$$

La parte real de esta magnitud corresponde a la potencia activa consumida, por lo que si se define la potencia aparente como el producto de los valores

eficaces de los vectores Park de tensión e intensidad, se puede expresar el factor de potencia para un sistema trifásico como:

$$\lambda = \frac{P_p}{S} \tag{3.88}$$

Se puede demostrar que el valor medio de la potencia compleja de Park, A_p, es siempre inferior a la potencia aparente, S, por lo que se define una cantidad, que no es la potencia distorsionante definida por Budeanu, que verifica:

$$D_p^2 = S^2 - A_p^2 \tag{3.89}$$

De esta forma, la expresión de la potencia aparente se escribe:

$$S^2 = A_p^2 + Q_p^2 + D_p^2 \tag{3.90}$$

A los vectores de Park se les puede aplicar las descomposiciones tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia:

- Dominio del tiempo. La parte activa de la intensidad, como aquella componente responsable de la potencia media, es:

  $$\boldsymbol{i}_a(t) = \frac{P_p}{U^2}\boldsymbol{v}(t) \tag{3.91}$$

  Por tanto, la parte no activa se puede obtener por diferencia:

  $$\boldsymbol{i}_x(t) = \boldsymbol{i}(t) - \boldsymbol{i}_a(t) \tag{3.92}$$

- Dominio de la frecuencia. Aplicando esta descomposición se pueden obtener expresiones de las potencias medias definidas anteriormente en función de tensiones e intensidades.
  Al realizar el desarrollo en serie de Fourier, se puede aplicar una descomposición de intensidades similar a la realizada en [18]. Para ello, en primer lugar se definen los conjuntos en los que se engloban los armónicos de intensidad: N_u, armónicos comunes a tensión e intensidad, y N_f, armónicos presentes sólo en intensidad. Para el grupo N_u se puede definir una admitancia:

  $$G_k + jB_k = \frac{\boldsymbol{I}_k}{\boldsymbol{U}_k} \tag{3.93}$$

  a partir de la cual se pueden expresar las potencias medias de Park:

  $$P_p = \sum_{k \in N_u} G_k U_k^2 \qquad Q_p = -\sum_{k \in N_u} B_k U_k^2 \tag{3.94}$$

Se define una conductancia equivalente, que es la que demanda la potencia activa P_p:

$$G_e = \frac{P_p}{U^2} \tag{3.95}$$

de forma que la intensidad activa es:

$$\boldsymbol{i}_a = G_e \boldsymbol{u}(t) \tag{3.96}$$

La intensidad dispersa es la diferencia de la componente real de la intensidad y la activa:

$$\boldsymbol{i}_s = \sum_{k \in N_u} (G_k - G_e) \boldsymbol{U}_k e^{jk\omega t} \tag{3.97}$$

De igual forma, se puede definir una susceptancia equivalente, que sería responsable de la aparición de la potencia media imaginaria de Park:

$$B_e = \frac{Q_p}{U^2} \tag{3.98}$$

cuya intensidad asociada es:

$$\boldsymbol{i}_q = -jB_e \boldsymbol{u}(t) \tag{3.99}$$

a partir de la cual se define la intensidad imaginaria dispersa:

$$\boldsymbol{i}_{rs} = \boldsymbol{i}_r - \boldsymbol{i}_q = \sum_{k \in N_u} (B_k + B_e) \boldsymbol{U}_k e^{jk\omega t} \tag{3.100}$$

Una vez que han sido definidas todas las componentes de intensidad que están contenidas en el conjunto N_u en función de las admitancias de la carga y la tensión de alimentación, basta caracterizar los armónicos de intensidad no presentes en la tensión:

$$\boldsymbol{i}_f = \sum_{k \in N_f} \boldsymbol{I}_f e^{jk\omega t} \tag{3.101}$$

el conjunto de intensidades definidas conforman la intensidad total:

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_a + \boldsymbol{i}_s + \boldsymbol{i}_q + \boldsymbol{i}_{rs} + \boldsymbol{i}_f \tag{3.102}$$

Además se puede comprobar que todas son ortogonales entre sí, por lo que verifican la siguiente ecuación:

$$I^2 = I_a^2 + I_s^2 + I_q^2 + I_{rs}^2 + I_f^2 \tag{3.103}$$

La relación existente entre estas intensidades y los términos de potencia anteriormente definidos es clara. La intensidad $\boldsymbol{i}_a$ es la relacionada con la aparición de la potencia activa P_p, la intensidad $\boldsymbol{i}_q$ es la responsable de la potencia reactiva Q_p, mientras que el resto de componentes conforman el término D_p:

$$D_p^2 = U^2 I_s^2 + U^2 I_{rs}^2 + U^2 I_f^2 \tag{3.104}$$

Por último, aunque en el capítulo siguiente se hará hincapié en ello, es conveniente resaltar que la minimización de la potencia media imaginaria de Park mediante elementos almacenadores de energía no lleva a un factor de potencia máximo, lo cual es evidente por (3.104), en la que el término $U^2 I_{rs}^2$ está presente. Para obtener un factor de potencia máximo la función que se tendrá que minimizar es $U^2(I_q^2 + I_{rs}^2)$.

3.3 Filtros pasivos sintonizados

La utilización de filtros pasivos sintonizados en los sistemas de distribución para la reducción de la distorsión armónica es una práctica común en el ámbito industrial. Un filtro pasivo sintonizado está compuesto en cada fase por una bobina conectada en serie con un condensador, tal y como se muestra en la Figura 3.1. Idealmente, la impedancia del filtro es nula para la frecuencia a la cual el filtro ha sido sintonizado, si bien siempre existe una pequeña resistencia debida fundamentalmente a la bobina del filtro. Dicha resistencia se puede obtener a partir del factor de calidad de la bobina, que se define como el cociente entre la reactancia a 50 Hz y la resistencia:

$$Q = \frac{\omega L}{R} \tag{3.105}$$

La frecuencia de sintonización del filtro, para la cual presenta una impedancia nula en el caso ideal, está relacionada con los valores del condensador y la bobina mediante la expresión:

$$f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{3.106}$$

El comportamiento del filtro pasivo depende de la frecuencia. Así, para valores inferiores a la frecuencia de sintonización, el filtro se comporta como un condensador; para la frecuencia de sintonización es un cortocircuito, mientras

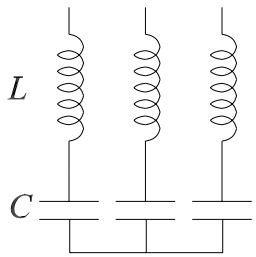


Figura 3.1: Filtro pasivo sintonizado.

que para frecuencias superiores a ésta, se comporta como una bobina. Además de reducir el contenido de armónicos, estos filtros pueden utilizarse para compensar la potencia reactiva.

Hasta hace relativamente poco tiempo, el diseño de filtros pasivos para la reducción del contenido armónico en las redes de distribución de energía eléctrica ha sido poco estudiado. Muchas son las publicaciones existentes acerca de la instalación de dichos filtros en las que se indica el problema previo, se enumeran los requerimientos o condicionantes existentes en las instalaciones bajo estudio, se propone un filtro que cumple con los mismos y una comparación de las situaciones inicial y final, [54], [75], [47], [45], [11], [4], [3], [55]. Sin embargo, todos adolecen de no presentar una forma sistemática de diseño de dichos filtros. Básicamente, éste consiste en un proceso de prueba y error apoyado en simulaciones y diagramas impedancia-frecuencia, que permiten evaluar la introducción de nuevas resonancias en el sistema.

La función primordial de los filtros es eliminar los armónicos que exceden de los valores recomendados, que son función de la norma aplicada. De esta forma, las frecuencias de sintonización de los mismos pueden establecerse a priori. Sin embargo, queda otro parámetro por fijar en el caso de tener varios filtros formando un banco: la capacidad del condensador o la potencia reactiva que debe aportar cada uno de ellos. Normalmente, los filtros se calculan para aportar una cierta cantidad de potencia reactiva en el armónico fundamental, si bien la forma en la que dicha potencia es repartida entre los filtros depende del sistema utilizado en su cálculo. Con estos dos valores, frecuencia de sintonización y potencia reactiva o capacidad del condensador, cada filtro del banco queda determinado, ya que la inductancia es función de ambos.

A continuación se describen los métodos más relevantes encontrados en la literatura especializada para el diseño de filtros pasivos.

3.3.1 Steeper

Es una de las publicaciones más antiguas existentes sobre la materia [74]. En ella no se indica la forma de repartir la potencia reactiva entre los filtros, se dice que es arbitraria, dependiendo de la experiencia. El método de diseño se basa en un proceso de prueba y error. Con esta forma de proceder, se tiene una compensación total de la potencia reactiva del armónico fundamental y una disminución de los armónicos cuya frecuencia de sintonización coincide con la de los filtros, pero se pierde el control sobre los demás armónicos.

En la misma línea justificativa y con los mismos problemas asociados se encuentra [39], en la que la potencia reactiva de cada filtro se ajusta en función del porcentaje de armónicos que cada filtro puede absorber.

3.3.1.1 Phipps

Este autor establece un procedimiento de diseño mediante la utilización de funciones de transferencia, si bien realmente no es más que una forma gráfica de representar los resultados de un proceso de diseño por prueba y error [58]. La idea básica propuesta consiste en la representación gráfica de la función de transferencia compuesta por la intensidad del sistema frente a la intensidad demandada por la carga. Dicha función puede ser expresada en términos de las impedancias del sistema y de los filtros, ya que estos forman un divisor de intensidad para las corrientes armónicas, tal y como se muestra en la Figura 3.2:

$$H = \frac{I_s}{I_g} = \frac{Z_f}{Z_f + Z_s} \tag{3.107}$$

Como es lógico, las condiciones de filtrado han ser tales que la normativa concerniente a límites de emisión de armónicos se cumpla. Si la intensidad maxima que se permite para el armónico *h-esimo* es I_{hlim}, puede ser definida la siguiente función de transferencia:

$$G(h) = \frac{I_{hlim}}{I_g} \tag{3.108}$$

Dicha función constituye un límite superior a la característica de filtrado definida en (3.107), siendo ésta la herramienta utilizada para el diseño de los filtros. Un valor superior a la unidad en (3.108) implica que los armónicos están dentro de los límites establecidos, no siendo necesaria la instalación de filtros sintonizados para dichas frecuencias. Todo lo contrario ocurre cuando este cociente es inferior a la unidad. Por tanto, la información aportada por (3.108) es doble: además de indicar cuales son los armónicos idóneos para la

sintonización de los filtros, provee un límite superior a la función de transferencia definida por (3.107), que se irá modificando conforme se vayan añadiendo dichos filtros.

Si bien es un método sencillo para el diseño de filtros pasivos, tiene el inconveniente de basarse en procesos de prueba y error, en los que la experiencia juega un papel fundamental. Además presenta la limitación adicional de no tener en cuenta los armónicos que pudieran estar contenidos en la tension del sistema.

3.3.2 Kawann y Emanuel

El objetivo buscado por estos autores es minimizar el coste de los filtros utilizados para reducir la distorsión de intensidad y compensar la potencia reactiva del fundamental [43]. En el caso de tener un único filtro, la optimización de coste no es posible, debido a que la restricción de potencia reactiva es suficiente para acometer el diseño del mismo. Sin embargo, con más de un filtro, diferente asignación de reactiva entre los mismos darán lugar a costes distintos, pudiéndose, por tanto, optimizar éste. Dadas las funciones de coste de bobinas y condensadores, K_l y K_c, en función de las potencias aparentes que estos absorben, S_{Li} y S_{Ci} respectivamente, la función a minimizar es:

$$\begin{aligned} \min \quad & f = \sum_i (K_l + K_c)_i \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_i Q_{1i} = Q_{1t} \end{aligned} \tag{3.109}$$

El método propuesto es sólo aproximado debido a los siguientes motivos:

- Para calcular la potencia aparente de condensadores y bobinas, S_{Ci} y S_{Li}, se utilizan valores de tensión e intensidad que están formados únicamente por el fundamental y el armónico al cual está sintonizado el filtro, despreciándose el resto de armónicos.
- Se considera que la tensión no cambia en el punto de acoplamiento cuando el filtro se instala, no teniéndose presente la impedancia del sistema.
- No se contemplan armónicos en la tension de alimentación.

3.3.3 Mattavelli

Uno de los principales problemas que tiene la reducción de armónicos y compensación de potencia reactiva mediante elementos pasivos es la modificación

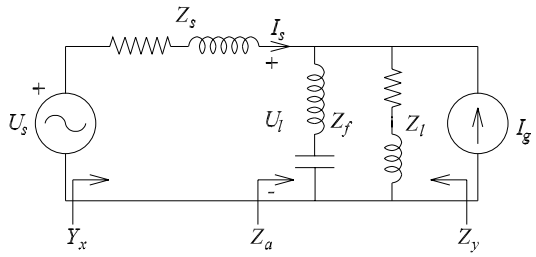


Figura 3.2: Circuito equivalente de un sistema de distribución.

de las impedancias existentes en el punto de instalación del filtro, con la posible aparición de resonancias entre la impedancia del sistema y la de los filtros. Para evitar estas resonancias, en lugar del clásico procedimiento de prueba y error, este autor propone minimizar la corriente armónica que circula por el sistema [48]. Si además se impone como requerimiento adicional la compensación de potencia reactiva del armónico fundamental, el problema queda planteado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \psi = \sum_{k>1} I_{sk}^2 = \sum_{k>1} \left(\frac{U_{sk}}{Z_{sk} + Z_{ak}} \right)^2 + \left(\frac{I_{lk} Z_{ak}}{Z_{sk} + Z_{ak}} \right)^2 \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_i Q_{1i} = Q_{1t} \end{aligned} \tag{3.110}$$

donde U_{sk} es la tension de la fuente para el armónico *k-esimo*, I_{lk} es la intensidad no lineal, y Z_{sk}, Z_{ak}, son las impedancias de la fuente, y la equivalente del paralelo formado por la parte lineal de la carga Z_{lk} y del filtro instalado Z_{fk}, respectivamente, tal y como se recoge en la Figura 3.2.

El problema planteado de esta forma presenta dos inconvenientes:

- La función objetivo propuesta (3.110) tiene el inconveniente de suponer ortogonales los armónicos de intensidad generados por la tensión armónica de la fuente y los armónicos de la carga no lineal, cuando, en realidad, no tienen por qué serlo.

- Por otra parte, la solución de esta ecuación no es posible hallarla mediante un método iterativo como el propuesto en [50], dado su alto carácter no lineal, sobre todo cuando se presentan armónicos por debajo de la frecuencia de sintonización más baja de los filtros instalados. Dicho método consiste en suponer constante, para cada una de las iteraciones, la tensión a la cual está sometida la carga, no teniéndose en cuenta la

impedancia del sistema. Bajo este supuesto, en cada iteración se calcula el compensador que minimiza la función objetivo con tensión de la carga constante, actualizándose posteriormente dicha tensión, e iterando hasta que el error en las tensiones sea inferior a un cierto límite.

Tal y como se verá en la sección 4.2.2.2 del Capítulo 4 esta forma de proceder no es adecuada, debido a que el carácter de la función que se minimiza considerando la impedancia del sistema es completamente distinto al que ésta presenta sin dicha impedancia.

3.3.4 Lin

Este autor propone en [46] un método sistemático para el diseño de filtros pasivos, cuyo objetivo es la minimización de la distorsión de intensidad sujeta a una serie de restricciones:

- Compensación de potencia reactiva para el armónico fundamental.
- Cumplimiento de los límites máximos de armónicos recomendados por la normativa que se esté aplicando.
- Desintonización de los filtros. Una práctica habitual a la hora de instalar filtros sintonizados es modificar ligeramente la frecuencia de sintonización para evitar que coincida en un orden entero de armónico. De esta forma, aunque se disminuye su eficacia, se previene la circulación de corrientes armónicas elevadas a la frecuencia de sintonización. Dichas intensidades son altas dado que, para estas frecuencias, la impedancia de los filtros es nula teóricamente, si bien existe en realidad, aún con perfecta sintonización, una pequeña resistencia debida a la bobina. Los autores proponen unos límites entre los cuales deben estar comprendidas las frecuencias de sintonización de los filtros, en base a las posibles variaciones que por envejecimiento pueden sufrir tanto la bobina como el condensador que componen el filtro.

Con todos estos condicionantes, el problema se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & THDi = \frac{\sqrt{\sum_{k>1} I_k^2}}{I_1} \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_i Q_{1i} = Q_{1t} \\ & 0 < I_k < I_{kmax} \quad k = 2 \dots n \\ & k_{hi} - 1 < k_{hi} < \alpha k_{hi} \quad i = 1 \dots m \end{aligned} \tag{3.111}$$

donde k_{hi} es la frecuencia de sintonización del filtro i, componente del banco de m filtros, y n es el número máximo de armónicos considerados.

A pesar de ser uno de los métodos para el diseño de filtros pasivos más completos encontrados, tiene una serie de inconvenientes, de entre los que cabe destacar:

- Se omite la parte real de las impedancias que componen la red que se estudia. Si bien esta aproximación puede ser válida en estudios simplificados de redes de transporte, no es aplicable a redes de distribución, en las que la resistencia de las líneas es del mismo orden de magnitud que la reactancia. Por otra parte, el valor de estas resistencias juega un papel importante en la amortiguación de los armónicos en casos de resonancia.

- La red se representa mediante un equivalente monofásico, por lo que no se pueden analizar casos en los que existan desequilibrios, ya sean de cargas o líneas.

- La función objetivo planteada tiene sentido sólo en el caso en que las frecuencias de sintonización de los filtros no coincidan con algún armónico, lo que se consigue mediante la imposición de la ultima restricción de (3.111). En caso contrario, los armónicos que coinciden con la sintonización de los filtros son eliminados del sistema debido a la nula impedancia que éstos presentan. En este último caso, la reducción de distorsión es notable únicamente con la inclusión de los filtros pasivos, y la función objetivo se plantea tan sólo con armónicos de frecuencias elevadas. Si bien estos armónicos han de ser tenidos en cuenta a la hora de diseñar los filtros, en cierta medida, al formar ellos únicamente la función objetivo, su importancia está siendo sobrevalorada.

3.3.5 Czarnecki

El método de diseño presentado en [21] se basa en la síntesis de redes pasivas. Dadas unas frecuencias de sintonización fijas, el problema que se plantea es el reparto de potencia reactiva entre los bancos de filtros para evitar amplificaciones de armónicos presentes entre dichas frecuencias. Para ello, y tomando como base la Figura 3.2 , se recurre a las siguientes definiciones de transmitancias:

- Ganancia de intensidad del sistema frente a intensidad generada. Esta función toma valores nulos para las frecuencias de sintonización y mayores que la unidad para los armónicos en los cuales se produce una

amplificación de intensidad. Este cociente puede ser expresado en función de las impedancias presentes en el circuito de la Figura 3.2:

$$B_n = \frac{I_s}{I_g} = \frac{Z_a}{Z_s + Z_a} \tag{3.112}$$

donde Z_a es la impedancia equivalente de los filtros más la carga lineal.

- Admitancia desde la red. Caracteriza los armónicos de la intensidad del sistema que son producidos por la tension de alimentación. Es evidente que este parámetro tendrá un valor elevado si la tensión de alimentación presenta armónicos a las frecuencias de sintonización de los filtros. Su expresión en función de las impedancias es:

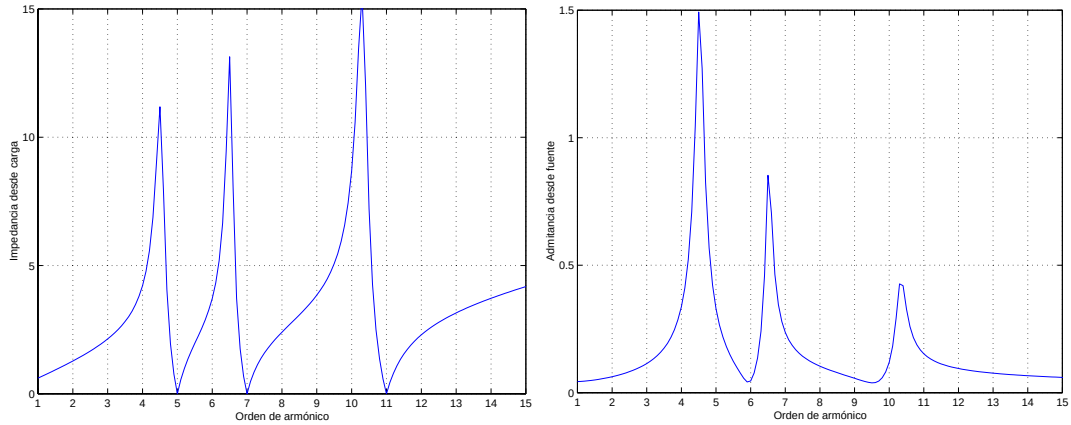
$$Y_x = \frac{I_s}{U_s} = \frac{1}{Z_s + Z_a} \tag{3.113}$$

- Impedancia desde la carga. Es representativa de las tensiones armónicas que se generan debidas a la intensidad de la carga. Presentará un valor nulo para las frecuencias de sintonización de los filtros:

$$Z_y = \frac{U_l}{I_g} = \frac{Z_s Z_a}{Z_s + Z_a} \tag{3.114}$$

Como se puede comprobar, todos los cocientes que han sido definidos tienen el mismo denominador: $Z_s + Z_a$. Dado que dicho denominador es función de la frecuencia, es posible expresarlo en términos de la transformada de Laplace sustituyendo $j\omega$ por s. De esta forma, el denominador se expresa según un polinomio en s. Puesto que este polinomio conforma el denominador de las cocientes definidos, sus ceros denotan los máximos de los mismos, que coinciden con los valores en los que se producen las resonancias entre la impedancia del sistema y los filtros instalados. La importancia de la ubicación de estos ceros es capital, sirva como ejemplo la Figura 3.3, en la que se muestran la impedancia que se ve desde la carga y la admitancia desde la red para un sistema en el que se instalan tres filtros sintonizados en los armónicos quinto, séptimo y decimoprimero. Los demás valores utilizados para confeccionar el ejemplo son irrelevantes para el objetivo perseguido. Concretamente, con el control de la posición de los ceros se pueden conseguir dos objetivos:

- Atenuación de los armónicos no característicos. Estos armónicos son los que generalmente se encuentran en el sistema en pequeña proporción.



(a) (b)

Figura 3.3: (a) Diagrama de impedancia desde la carga. (b) Diagrama de admitancia desde la fuente.

Como puede verse en la Figura 3.3.(a), las impedancias mínimas se establecen para las frecuencias de sintonización, existiendo antes de todos los mínimos un máximo situado en los ceros que marca el polinomio $Z_s + Z_a$. Entre ambos valores, se pueden encontrar estos armónicos no característicos, que por el hecho de la adición de los filtros pueden verse amplificados, con la consiguiente pérdida de efectividad del filtrado.

- Al añadir un filtro pasivo sintonizado en el armónico k_h, la amplificación de intensidad (3.112) y la impedancia desde la red (3.114) tienen un mínimo para dicha frecuencia, mientras que en la admitancia desde la red (3.113) dicho mínimo se desplaza a valores superiores a k_h, como puede verse en la Figura 3.3.(b). Para frecuencias inferiores a estos mínimos, siempre existe una zona de amplificación y un máximo. En este sentido, variaciones de las impedancias, debidas a reconfiguraciones de la red o bien a pérdidas de potencia reactiva del condensador del filtro por envejecimiento, pueden hacer que los mínimos se desplacen hacia valores superiores a k_h, con lo que se produciría una desastrosa resonancia en un de armónico importante. Precisamente con el control de los polos de las transmitancias definidas anteriormente se pueden alejar estos máximos de los mínimos convenientemente para prevenir que variaciones de parámetros resulten en resonancias perjudiciales.

A pesar de las ventajas expuestas, el método presenta algunos inconvenientes entre los que cabe destacar los siguientes:

- La selección de los polos de las transmitancias definidas anteriormente es arbitraria, por lo que el diseño de los filtros se sigue apoyando en procesos de prueba y error.
- El modelo de red que se utiliza es monofásico. Además, no se tienen en cuenta las partes resistivas de las impedancias.
- Aunque no se menciona en [21], es imposible disponer libremente los polos del sistema y además compensar la energía reactiva del armónico fundamental. Esta conclusión es lógica, pues tal y como se puede comprobar en la Figura 3.3, existen tantos polos o máximos de las transmitancias como filtros se instalan. Si se fijan dichos polos, automáticamente se tienen determinados los valores de los condensadores de cada filtro. Para poder además compensar la reactiva del fundamental, el autor introduce una reactancia en serie con la impedancia de red de valor desconocido, de forma que el problema presenta el mismo número de ecuaciones e incógnitas.

3.3.6 Czarnecki y Ginn

Proponen un método numérico para la optimización de filtros pasivos en base a dos parámetros que miden la efectividad de los mismos, [38], [23], [22]:

- Reducción de la distorsión de corriente. Si $\|i_{do}\|$ es la norma de intensidad antes de instalar el filtro, equivalente a su valor eficaz, e $\|i_d\|$ el valor eficaz después de la instalación, una medida de la efectividad en la reducción de la distorsión de intensidad es:

$$\varepsilon_i = 1 - \frac{\|i_d\|}{\|i_{do}\|} \tag{3.115}$$

- Reducción de la distorsión de tension. Al igual que el parámetro definido para la intensidad:

$$\varepsilon_u = 1 - \frac{\|u_d\|}{\|u_{do}\|} \tag{3.116}$$

Normalmente, la minimización de uno de estos parámetros no lleva a la reducción del otro, debido a que la tension de la red puede estar distorsionada. Para encontrar un equilibrio entre la reducción de la tasa de distorsión de tension e intensidad, se puede minimizar una función objetivo de la forma:

$$f = W_i(1 - \varepsilon_i) + W_u(1 - \varepsilon_u) \tag{3.117}$$

propuesta previamente por Sharon en [64]. El peso que se le da a cada uno de los coeficientes W_i y W_u determinará la solución final obtenida en función de lo que se crea más conveniente para cada tipo de aplicación estudiada.
Las restricciones que se añaden a la función objetivo son la positividad de los elementos LC componentes de los filtros y la compensación de la potencia reactiva en el armónico fundamental. En esta formulación del problema, se deja cierta libertad a la hora de compensar la potencia reactiva, pudiéndose establecer unos márgenes entre los cuales se puede realizar la compensación. Con todo esto el problema se formula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & f = W_i \frac{\|i_d\|}{\|i_{do}\|} + W_u \frac{\|u_d\|}{\|u_{do}\|} \\ \text{sujeto a} \quad & C_i > 0 \quad L_i > 0 \quad i = 1 \ldots m \\ & aQ_{1t} < \sum Q_i < bQ_{1t} \\ & a < b < 1 \end{aligned} \tag{3.118}$$

El método no está del todo depurado debido al fuerte carácter no lineal de la función objetivo. Al utilizar un método de minimización basado en gradiente, la solución final alcanzada depende del valor inicial a partir del cual se inicia el proceso iterativo. De esta forma, para poder llegar a un mínimo absoluto, se propone ejecutar varias veces el algoritmo a partir de valores iniciales distintos. En este sentido, nunca hay garantías de haber alcanzado dicho mínimo.

3.4 Resumen del capítulo

En el presente capítulo se ha realizado una revisión de la literatura especializada referente a las definiciones de la potencia reactiva y los métodos de diseño de filtros pasivos:

- Potencia reactiva. Se analizan las teorías más relevantes para sistemas monofásicos y trifásicos, planteadas tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia. El objetivo de este estudio ha sido encontrar las definiciones de potencia reactiva tales que mediante su compensación se consiga un aumento del factor de potencia. Por otra parte, y desde el punto de vista del diseño del compensador de potencia reactiva, también es importante que dicho término de potencia pueda ser expresado en función de las características de la carga. De esta forma, el diseño del compensador se puede realizar en función de las características de ésta.

- Diseño de filtros pasivos. A pesar de ser práctica habitual la utilización de los filtros pasivos para la mitigación de armónicos en las redes de distribución, se puede comprobar la ausencia de propuestas de diseño sistemático de los mismos. Tan solo publicaciones recientes tratan el tema de una forma exhaustiva, si bien presentan aspectos que pueden ser mejorados:
  - Las funciones que se plantean para la optimización de los filtros tienen un fuerte carácter no lineal. Por una parte, desde un punto de vista físico, es importante conocer los causantes de la no linealidad. Por otra, desde un punto de vista matemático, la optimización se debe llevar a cabo mediante el uso de un método adecuado.
  - Los modelos tratados en la literatura son simplificados. En este sentido, se consideran sólo las partes imaginarias de las impedancias y la representación de la red es monofásica. Con estas simplificaciones, no pueden tratarse desequilibrios de tensiones o cargas ni armónicos no característicos.

A partir de la revisión bibliográfica realizada, se ha podido comprobar que el proceso de diseño de filtros pasivos puede ser mejorado mediante la conjunción de una adecuada definición de potencia reactiva y un estudio de la optimización a realizar, cicunscrito tanto al proceso de minimización como a la propia función a optimizar.

Capítulo 4

Compensación mediante filtros pasivos

4.1 Introducción

En el capítulo anterior se analizaron las teorías más relevantes de potencia reactiva en regímenes no senoidales así como las diferentes técnicas de compensación de reactiva y armónicos. La instalación de filtros pasivos es uno de los métodos que tradicionalmente se ha utilizado para la eliminación de armónicos en los sistemas eléctricos industriales. Sólo en la literatura especializada más reciente se han encontrado justificaciones razonables de cómo repartir la potencia reactiva suministrada entre cada uno de los filtros.

Por otra parte, el problema de compensación de potencia reactiva en regímenes no senoidales se realiza siempre suponiendo que la tensión en la carga es constante, o lo que es lo mismo, que la impedancia del sistema es despreciable, lo cual no se verifica del todo para sistemas eléctricos de potencia industriales. Al tener en cuenta esta impedancia interna del sistema surgen los siguientes problemas:

- Las ecuaciones que definen el problema no tienen una solución analítica, por lo que se tiene que recurrir a métodos numéricos para encontrar la solución óptima del problema.

- La solución del problema de minimización no es única. Existen multitud de óptimos locales, entre los que habrá que buscar el mínimo absoluto.

- Aparecen resonancias entre el compensador pasivo elegido y la impedancia del sistema. Desde el punto de vista de operación del sistema,

las resonancias deben ser evitadas a toda costa. Además, se debe estar lo más alejado posible de ellas, para evitar que puedan producirse por cambios en los parámetros del sistema o del compensador. Desde otro punto de vista, si se analiza el proceso de optimización, las resonancias son las causantes de la fuerte no linealidad de la función a minimizar. En particular, se demostrará que las resonancias separan las regiones donde se tienen que buscar los mínimos locales.

En este capítulo se aborda el diseño de compensadores pasivos de potencia reactiva y armónicos, teniendo en cuenta la impedancia del sistema. En primer lugar, se justificará la elección de la teoría de potencia reactiva utilizada. Posteriormente, se analizarán las ecuaciones que se tendrán que minimizar, así como el método numérico que se ha seleccionado para resolverlas [52], [53].

4.2 Planteamiento del problema

4.2.1 Potencia reactiva

Esta tesis se circunscribe al análisis de los sistemas de potencia industriales, caracterizados por estar compuestos principalmente por cargas trifásicas, que en general pueden ser desequilibradas. Dentro de estas cargas, las no lineales, causantes de la aparición de armónicos, suelen ser accionamientos de motores de corriente alterna o continua, rectificadores utilizados en procesos de electrólisis, calentamiento inductivo, etc., [59]. La característica principal de estas cargas no lineales es que los armónicos predominantes son los impares, sin incluir los múltiplos de tres: $6k \pm 1$, siendo k un número entero [59],[27].

La teoría de potencia reactiva que se utilice debe adaptarse fácilmente a las exigencias planteadas por el caso particular que se está analizando. En este sentido, una de las que mejor lo hace es la desarrollada por Ferrero y Superti-Furga [31], descrita brevemente en el capítulo anterior. Las ventajas que ofrece la utilización de esta teoría son claras:

- Un sistema trifásico sin componentes homopolares puede ser tratado en el dominio de Park mediante un formulismo matemático similar al utilizado en el caso de sistemas monofásicos. En caso contrario, no existe ninguna ventaja en la utilización de este cambio de coordenadas, pues se pasa de tener tres componentes por cada magnitud analizada (una para cada una de las fases) a otras tres (directa, inversa y homopolar).

- Permite el tratamiento de desequilibrios en tensiones y cargas. Las componentes directa e inversa de un mismo armónico son consideradas como armónicos diferentes en esta descomposición. En este sentido, presenta ventajas frente a otras teorías de potencia reactiva de sistemas trifásicos en las que sólo puede analizarse desequilibrio de cargas [18], [19].
- En el análisis de los términos de potencia, aparece la potencia reactiva instantánea [1] que, como se vio en el capítulo anterior, puede compensarse sin elementos almacenadores de energía. En otras formulaciones este aspecto fundamental de la transmisión de potencia en sistemas trifásicos no está presente [19].

Para problemas equilibrados con cargas no lineales, puede comprobarse que cada armónico tiene sólo una secuencia [41]: directa (1, 4, 7, 10,...), inversa (2, 5, 8, 11,...) u homopolar (3, 6, 9,...). Dado que en las instalaciones industriales, los armónicos múltiplos de tres o no están presentes o su valor es tan pequeño que pueden despreciarse en comparación con el resto, el sistema trifásico puede estudiarse en el dominio de Park con la presencia de dos únicas componentes, directa e inversa, siendo de aplicación, por tanto, la teoría de la potencia reactiva elegida.

4.2.2 Compensación de reactiva

Para la teoría de potencia elegida es posible realizar la descomposición de intensidades tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Se elige esta última, pues se podrá diseñar las características del compensador en función de las de la carga.

En regímenes senoidales, con la compensación de la potencia reactiva se consigue un incremento del factor de potencia. En el caso no senoidal esto no siempre sucede, debido a que aparece un término de potencia distorsionante. El factor de potencia, dadas las potencias en el dominio de Park, puede expresarse como:

$$\lambda = \frac{P_p}{\sqrt{P_p^2 + Q_p^2 + D_p^2}} \tag{4.1}$$

Para maximizar el factor de potencia se deberán minimizar la potencia reactiva y la distorsionante: $Q_p^2 + D_p^2$. Si se compensa con elementos almacenadores de energía pasivos no todos los términos de la potencia distorsionante pueden ser compensados. Tan solo podrán compensarse los que están formados por armónicos ortogonales a la tensión. Dado que la potencia distorsionante es:

$$D_p^2 = U^2(I_s^2 + I_{rs}^2 + I_f^2) \tag{4.2}$$

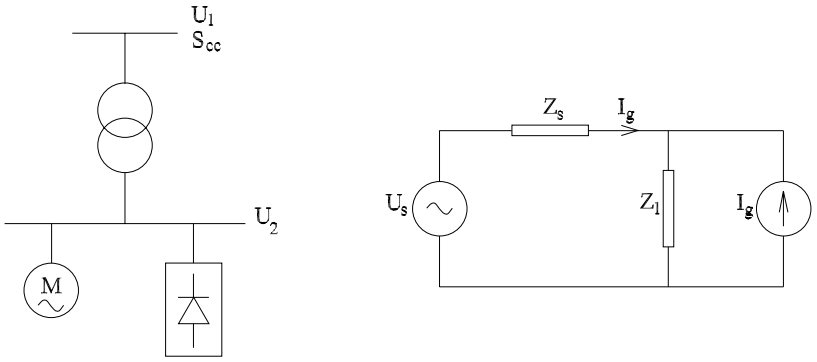


Figura 4.1: Esquema unifilar y equivalente armónico de una instalación industrial.

el único término compensable por este método es $U^2 I_{rs}^2$, ya que I_s está formado por armónicos en fase con la tensión e I_f está compuesto por armónicos que no están presentes en la tensión. Por otra parte, se puede considerar que el valor eficaz de la tensión no va a sufrir grandes modificaciones con independencia del compensador que se añada, por lo que la función a minimizar se puede expresar como:

$$f = I_q^2 + I_{rs}^2 = I_r^2 \tag{4.3}$$

En una instalación industrial se tienen cargas lineales y no lineales. Las lineales se pueden modelar mediante una admitancia y las no lineales por fuentes de intensidad a las frecuencias a las que generan los armónicos. En la Figura 4.1 se muestra el esquema de una instalación industrial y el circuito equivalente para un armónico. Dicha instalación está compuesta por un transformador que alimenta a unas cargas lineales, simbolizadas en el esquema unifilar por un motor, y no lineales, representadas por el rectificador. Al construir el circuito equivalente para cada armónico, la red y el transformador se sustituyen por su impedancia equivalente Z_s, el motor, al ser una carga lineal, por Z_l y la carga no lineal por una fuente que inyecta la corriente para dicha frecuencia.

Dada una tensión de alimentación en bornas de la carga, las cargas lineales consumen una intensidad con los mismos órdenes de armónicos que ésta, mientras que las cargas no lineales además de estos armónicos, pueden generar otros no presentes en la fuente de tensión. En el caso más general, si se denomina N_u al conjunto de armónicos comunes a tensión e intensidad, y N_i al conjunto de armónicos presentes sólo en la intensidad, la intensidad consumida por las cargas lineales estará formada por los órdenes contenidos en N_u, mientras que las cargas no lineales contendrán los órdenes N_u y N_i. La

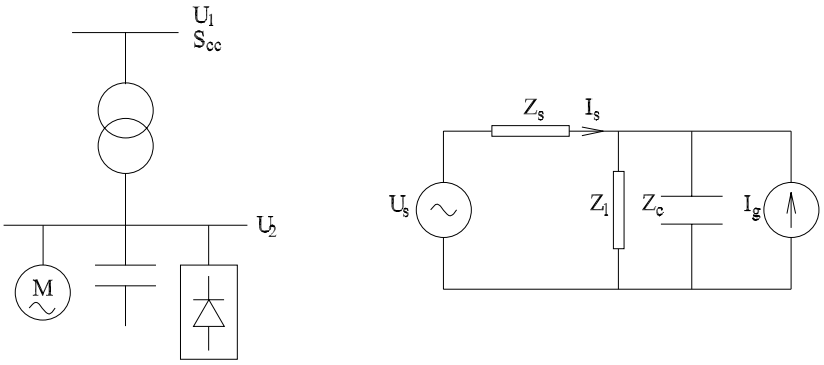


Figura 4.2: Compensación de reactiva mediante métodos pasivos.

intensidad demandada por el conjunto puede expresarse como:

$$\boldsymbol{i}_s(t) = \sum_{k \in Nu} \left[(G_{lk} + jB_{lk})\, \boldsymbol{U}_k - \boldsymbol{I}_{gk} \right] e^{jk\omega t} - \sum_{k \in N_i} \boldsymbol{I}_{gk} e^{jk\omega t} \tag{4.4}$$

Por otra parte, en este tipo de instalaciones industriales, las cargas consumen potencia reactiva, por lo que los compensadores suelen ser condensadores o filtros pasivos sintonizados en un determinado armónico. La susceptancia de un condensador para un determinado armónico puede ser expresada en función de su capacidad y del orden de armónico:

$$B_{ck} = jk\omega C \tag{4.5}$$

Lo mismo puede hacerse para un filtro pasivo, apareciendo también en dicha expresión la frecuencia de sintonización k_h:

$$B_{ck} = \frac{jk\omega C}{1 - (k/k_h)^2} \tag{4.6}$$

Si se añade un compensador ideal pasivo, condensador o filtro, como se indica en la Figura 4.2, las componentes de intensidad ortogonales a la tensión se verán modificadas:

$$\boldsymbol{i}(t) = \sum_{k \in Nu} \left[(G_k + j(B_{lk} + B_{ck}(C)))\, \boldsymbol{U}_k - \boldsymbol{I}_{gk} \right] e^{jk\omega t} - \sum_{k \in N_f} \boldsymbol{I}_{gk} e^{jk\omega t} \tag{4.7}$$

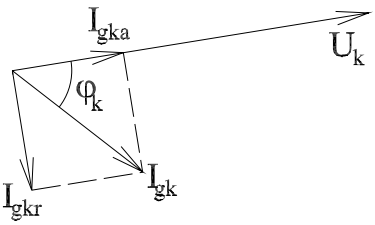


Figura 4.3: Descomposición ortogonal de la intensidad sobre la tensión.

Esta intensidad puede descomponerse ortogonalmente según (3.102), siendo la función que se desea minimizar:

$$I_r^2 = \sum_{k \in N_u} I_{kr}^2 = \sum_{k \in N_u} \left[\left(B_{lk} + B_{ck}(C) \right) U_k - I_{gkr} \right]^2 \tag{4.8}$$

donde I_{gkr} es la proyección de $\boldsymbol{I}_{gk}$ sobre la dirección ortogonal a $\boldsymbol{U}_k$ según se muestra en la Figura 4.3.

El compensador pasivo que minimiza la intensidad reactiva, y por tanto maximiza el factor de potencia, será aquel que verifique la expresión:

$$\frac{\partial I_r^2}{\partial C} = 0 \tag{4.9}$$

Esta ecuación tiene solución analítica en el caso de considerar la tensión en la carga constante, mientras que si se consideran las variaciones de la tensión de la carga debidas a la presencia del compensador, por el hecho de no despreciar la impedancia del sistema, se tendrá que recurrir a la resolución de la misma por un método numérico.

4.2.2.1 Carga conectada a un sistema de potencia de cortocircuito infinita

Si puede considerarse la tensión de la carga constante, el cálculo del compensador que maximiza el factor de potencia es sencillo, ya que la ecuación que lo determina es cuadrática en el valor de la capacidad de dicho compensador:

$$\frac{\partial I_r^2}{\partial C} = \sum_{k \in N_u} 2 \left[\left(B_{lk} + B_{ck}(C) \right) U_k - I_{gkr} \right] \frac{\partial B_{ck}(C)}{\partial C} U_k = 0 \tag{4.10}$$

Para el caso de compensación con un condensador y un filtro pasivo sintonizado al armónico k_h, se obtienen las siguientes ecuaciones para la capacidad:

$$C_{opt} = -\frac{\sum_{k\in N_u} k\omega U_k \left(B_{lk}U_k - I_{gkr}\right)}{\sum_{k\in N_u} \left(k\omega U_k\right)^2} \tag{4.11}$$

$$C_{opt} = -\frac{\sum_{k\in N_u} \dfrac{k\omega U_k \left(B_{lk}U_k - I_{gkr}\right)}{1-(k/k_h)^2}}{\sum_{k\in N_u} \left(\dfrac{k\omega U_k}{1-(k/k_h)^2}\right)^2} \tag{4.12}$$

Si se está compensando la potencia reactiva mediante un banco de m filtros sintonizados a los armónicos $k_{h1}, \ldots, k_{hm}$, se tendrá que resolver un sistema de m ecuaciones lineales:

$$\sum_{k\in N_u} \sum_{l=1}^{m} \frac{\left(k\omega U_k\right)^2 C_l}{\left[1-\left(k/k_{hl}\right)^2\right]\left[1-\left(k/k_{hi}\right)^2\right]} = -\sum_{k\in N_u} \frac{k\omega U_k \left(B_{lk}U_k - I_{gkr}\right)}{1-\left(k/k_{hi}\right)^2} \tag{4.13}$$

donde i es un índice que varía de 1 a m. Expresado de forma matricial, el sistema de ecuaciones anterior es:

$$A \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix} = b \tag{4.14}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} \sum \frac{\left(k\omega U_k\right)^2}{\left(1-(k/k_{h1})^2\right)^2} & \cdots & \sum \frac{\left(k\omega U_k\right)^2}{\left(1-(k/k_{hm})^2\right)\left(1-(k/k_{h1})^2\right)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum \frac{\left(k\omega U_k\right)^2}{\left(1-(k/k_{h1})^2\right)\left(1-(k/k_{hm})^2\right)} & \cdots & \sum \frac{\left(k\omega U_k\right)^2}{\left(1-(k/k_{hm})^2\right)^2} \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

$$b = -\begin{bmatrix} \sum \frac{k\omega U_k\left(B_{lk}U_k - I_{gkr}\right)}{1-(k/k_{h1})^2} \\ \vdots \\ \sum \frac{k\omega U_k\left(B_{lk}U_k - I_{gkr}\right)}{1-(k/k_{hm})^2} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Para todos estos casos, al ser la función a minimizar cuadrática, el problema tiene solución única, que puede ser obtenida analíticamente mediante las expresiones anteriores (4.11)-(4.13).

4.2.2.2 Carga conectada a un sistema de potencia de cortocircuito finita

Cuando la tensión de la carga no puede considerarse constante debido a la presencia de una impedancia del sistema, tal y como puede verse en la Figura 4.2, las derivadas de la tensión en la carga respecto al valor de la capacidad del compensador deben ser tenidas en cuenta.

Hay que hacer notar que, debido a la presencia de la impedancia del sistema, los armónicos de intensidad producidos por la carga no lineal están presentes en la tensión de la carga, pues provocan una caída de tensión en dicha impedancia. Por esto, los órdenes de los armónicos contenidos en la tensión de la carga y en la intensidad del sistema son los mismos, perteneciendo al conjunto: $N \equiv N_u \bigcup N_i$.

Para resolver este problema de minimización se podría plantear un proceso iterativo, en el que el condensador se calculase mediante unas expresiones analíticas, similares a las descritas en la sección anterior, que incluyeran las variaciones de la tension de la carga respecto al valor de la capacidad del compensador [49]. La tensión se actualizaría en cada una de estas iteraciones, en función del valor del compensador obtenido. El algoritmo propuesto se muestra a continuación:

1. Valor inicial del condensador. Cálculo de la tensión en la carga como función de ese valor.

2. Cálculo del condensador óptimo considerando la tensión y su primera derivada constantes.

3. Actualización de la tensión con el valor del condensador.

4. Si la diferencia entre los valores de los condensadores obtenidos de las dos últimas iteraciones es mayor que un valor, seleccionado a priori, suficientemente pequeño, volver el punto 2. Si es menor, se finaliza el proceso siendo el condensador óptimo el de la última iteración.

La función a partir de la cual se obtiene el valor del compensador óptimo para cada una de las iteraciones es ahora:

$$\frac{\partial I_r^2}{\partial C} = \sum_{k \in N} 2\left[\left(B_{lk} + B_{ck}(C)\right) U_k - I_{gkr}\right] \left[\frac{\partial B_{ck}(C)}{\partial C} U_k + \frac{\partial U_k}{\partial C}\left(B_{lk} + B_{ck}\right)\right] = 0 \tag{4.17}$$

Particularizando esta ecuación para el caso del condensador, y agrupando términos, se obtiene una ecuación cuadrática:

$$\alpha C^2 + \beta C + \gamma = 0 \tag{4.18}$$

donde α, β, γ se consideran constantes para cada iteración, dependiendo del valor de la tensión en la carga y de sus derivadas:

$$\alpha = \sum_{k \in N} k^2 \omega^2 \frac{\partial U_k^2}{\partial C} \tag{4.19}$$

$$\beta = \sum_{k \in N} k^2 \omega^2 U_k^2 + 2 \sum_{k \in N} B_{lk} k\omega \frac{\partial U_k^2}{\partial C} - \sum_{k \in N} I_{gkr} k\omega \frac{1}{U_k} \frac{\partial U_k^2}{\partial C} \tag{4.20}$$

$$\gamma = -2 \sum_{k \in N} I_{gkr} \left[k\omega U_k + \frac{B_k}{2U_k} \frac{\partial U_k^2}{\partial C} \right] + 2 \sum_{k \in N} B_{lk} k\omega U_k^2 + \sum_{k \in N} B_{lk}^2 \frac{\partial U_k^2}{\partial C} \tag{4.21}$$

Sin embargo, este método no es adecuado debido a que la presencia de las derivadas de la tensión en la carga hacen que la función objetivo sea fuertemente no lineal, dejando de ser válida la aproximación cúbica que se realiza en cada iteración al suponer las tensiones y sus derivadas constantes. Esto se ilustra en el ejemplo propuesto en la Figura 4.4.

Representando gráficamente el valor eficaz de la intensidad reactiva frente al valor de la capacidad del condensador se puede observar el carácter no lineal de dicha función, lo cual plantea dos problemas:

- El método iterativo propuesto no es de aplicación, ya que es poco probable que se alcance el óptimo, salvo que la búsqueda se inicie muy cerca de la solución. En la Figura 4.5 se muestran los sucesivos valores de la capacidad del condensador aplicando el proceso iterativo y las funciones objetivo particularizadas para cada uno de esos valores, en caso de considerar la tensión y sus derivadas constantes.

- La solución al problema deja de ser única, existiendo más de un mínimo local. En la Figura 4.4 puede apreciarse que éstos mínimos están situados entre dos máximos. Dichos máximos se producen para los valores de las capacidades de los condensadores que generan las resonancias para las frecuencias de los armónicos del sistema.

Para resolver este problema debe aplicarse un método numérico a la ecuación (4.17) que tenga en cuenta las segundas derivadas de la tensión. Este

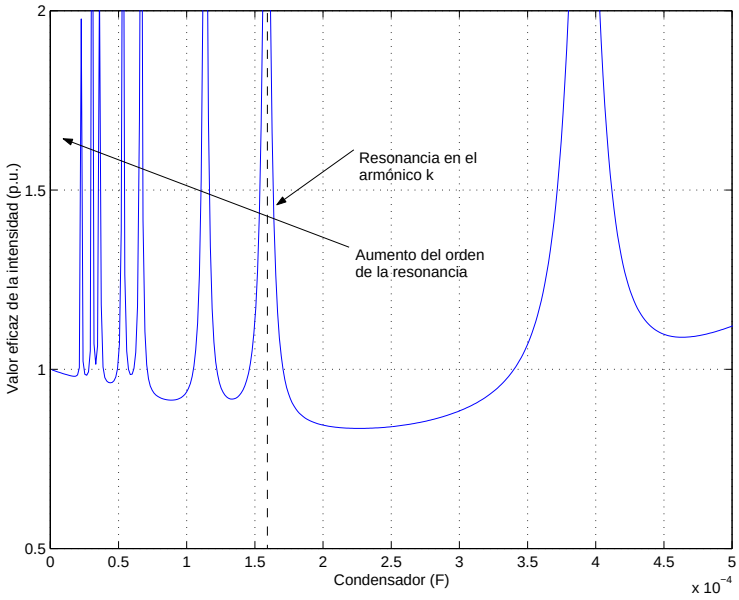


Figura 4.4: Valor eficaz de la intensidad del sistema en función del condensador.

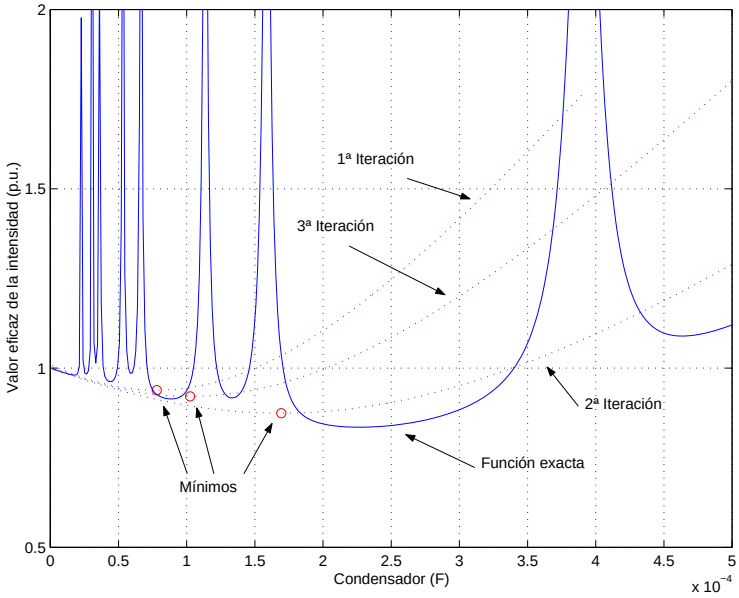


Figura 4.5: Proceso iterativo de minimización con tensiones constantes.

método podría ser el de Newton, el cual busca la solución de la ecuación a partir de una solución inicial mediante aproximaciones lineales en los sucesivos puntos del proceso iterativo. Para el caso de una sola variable:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \tag{4.22}$$

En este caso, tal y como se desprende de la Figura 4.4, los mínimos se encuentran entre los valores de las capacidades de los condensadores que crean las resonancias para los armónicos existentes en el sistema. Dichas resonancias pueden ser consideradas como restricciones. En este sentido, el cálculo del mínimo debe restringirse a las zonas delimitadas por estas fronteras. Dado que el método de Newton realiza una aproximación lineal en un punto de la función que se desea minimizar, no se tiene ninguna garantía de que los sucesivos puntos de este algoritmo estén dentro de la zona, delimitada por las restricciones, en la que estamos interesados encontrar el mínimo. Por estos motivos, se aplicará un algoritmo de punto interior para calcular los mínimos de la función a estudiar [40], [82], [9], [81].

4.2.3 Algoritmo de punto interior

Considérese que se desea minimizar la función monovariable dependiente de la variable C que se muestra en la Figura 4.6, en una región delimitada por la restricción $C > 0$. En la iteración *k-esima* se calcula la derivada de la función en el punto $C^{(k)}$, obteniendo a partir de ella la nueva solución $C^{(k+1)}$. Sin embargo, esta solución está fuera de la zona analizada.

Una posible solución para asegurar que siempre se está buscando el óptimo en la región correcta, es aplicar un método de punto interior como el algoritmo primal-dual de barrera logarítmica. Básicamente este algoritmo consiste en modificar la función objetivo añadiendo un término que penaliza la proximidad a una frontera que marca un límite de la zona en la que se busca el óptimo, limitando además los incrementos de la variable en cada iteración con el fin de que el valor permanezca siempre en la región factible, pues el logaritmo está definido sólo en ésta. Para el ejemplo de la Figura 4.6, dada la función objetivo original f, la modificada, F, se escribe como:

$$F = f - \mu \ln C \tag{4.23}$$

donde μ es un parámetro denominado factor de penalización. Tal y como puede verse en la Figura 4.6, con la función modificada es imposible salirse de

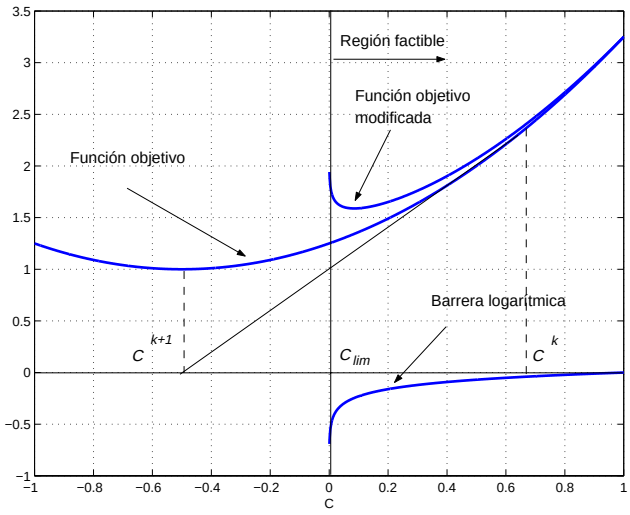


Figura 4.6: Fundamento de los métodos de punto interior de barrera logarítmica.

la región deseada, pues la penalización hace aumentar la función modificada cerca de la barrera, impidiendo que ese límite se rebase.

Este factor de penalización se hará decrecer conforme el número de iteraciones aumente, de forma que al final del proceso iterativo su influencia en la función original sea despreciable. Por tanto, existirán dos procesos iterativos: uno externo, en el que se va a buscar el óptimo de la función original, y otro interno, en el que se buscará el óptimo de la función modificada para un valor de μ determinado, si bien en la práctica sólo se suele realizar una iteración de este último.

4.3 Optimización mediante técnicas de punto interior

En esta sección se describirán las técnicas de punto interior aplicadas a la optimización de compensadores pasivos de potencia reactiva. Tal y como se ha visto anteriormente, el objetivo es buscar una serie de mínimos locales en unas regiones predefinidas, delimitadas por las resonancias existentes entre la impedancia del sistema y el compensador instalado. En primer lugar, se calculan los puntos de resonancia y se determinan las zonas factibles en las que deben ser hallados los mínimos locales. Posteriormente, se aplica el algoritmo de punto interior para encontrar dichos mínimos locales. Por último, se deberá

encontrar el mínimo absoluto por comparación de todos los mínimos locales obtenidos.

Primero se expondrá el problema de la compensación de potencia reactiva con un condensador o un filtro pasivo sintonizado en el armónico k_h. Posteriormente se extenderá el algoritmo a la compensación mediante banco de filtros sintonizados.

4.3.1 Compensación con filtro pasivo o condensador

4.3.1.1 Determinación de las resonancias

Las resonancias que se producen entre la impedancia del sistema y el compensador pasivo de reactiva a instalar vienen determinadas por la expresión:

$$\frac{\partial I_{sk}^2}{\partial C} = 0 \quad k > 1 \tag{4.24}$$

donde I_{sk} es el valor eficaz del armónico *k-esimo* de la intensidad del sistema, el cual dependerá del tipo de compensador instalado. En general, la ecuación resultante es de segundo orden:

$$H(B_{lk} + B_{ck})^2 + L(B_{lk} + B_{ck}) + M = 0 \tag{4.25}$$

donde H, L y M son constantes que dependen de la tensión en la carga, la corriente generada por la parte no lineal de la carga, la impedancia del sistema y la conductancia de la parte lineal de la carga, tal y como se muestra en las siguientes ecuaciones:

$$H = I_{gkr}U_k(R_{sk}^2 + X_{sk}^2) - U_k^2 X_{sk} \tag{4.26}$$

$$L = U_k^2(1 + 2R_{sk}G_{lk}) - (R_{sk}^2 + X_{sk}^2)(I_{gk}^2 - 2U_k G_{lk} I_{gka}) \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} M &= -I_{gkr}U_k\left[1 + (R_{sk}G_{lk})^2 + 2R_{sk}G_{lk} + (X_{sk}G_{lk})^2\right] + \\ &+ X_{sk}\left[(U_k G_{lk})^2 + I_{gk}^2 - 2U_k G_{lk} I_{gka}\right] \end{aligned} \tag{4.28}$$

Una vez obtenido el valor de $B_{lk} + B_{ck}$ que es solución de (4.25), al que se llamará A_k, se calcula el valor del condensador que define la resonancia. Este valor depende de la naturaleza del compensador instalado:

- Batería de condensadores:

$$C_{rk} = \frac{A_k - B_{lk}}{k\omega} \tag{4.29}$$

- Filtro sintonizado al armónico k_h:

$$C_{rk} = \frac{A_k - B_{lk}}{\frac{k\omega}{1-(k/k_h)^2}} \tag{4.30}$$

Los condensadores que crean las resonancias son más pequeños cuanto mayor es el orden de armónico, es decir, que en la Figura 4.4, los valores de los condensadores cerca del origen crean las resonancias para los armónicos de mayor orden. Por otra parte, hay que tener en cuenta que en el caso de compensación con filtro sintonizado a una frecuencia fija k_h, las resonancias sólo son posibles para armónicos por debajo de la frecuencia de sintonización, ya que para frecuencias superiores el filtro se comporta como una inductancia.

Una vez que se tienen los valores de la capacidad de los condensadores que producen la resonancia para cada uno de los armónicos considerados, se tiene que minimizar la componente reactiva de la intensidad en el intervalo comprendido entre dos resonancias.

4.3.1.2 Formulación del problema

Para encontrar el mínimo de la intensidad reactiva en el intervalo comprendido entre dos condensadores que producen resonancias, es necesario recurrir a un método numérico como el Newton-Raphson. El problema es que dicho método iterativo se basa en sucesivas aproximaciones lineales de la función objetivo, no existiendo ninguna garantía de que se esté buscando la solución siempre dentro del intervalo seleccionado. Para salvar estos inconvenientes se recurre al algoritmo primal-dual de punto interior y barrera logarítmica. El problema se formula de la siguiente forma:

$$\min_{C} \quad I_{rs}^2 \tag{4.31}$$

$$\text{sujeto a} \quad C < C_k \tag{4.32}$$

$$C > C_h \tag{4.33}$$

donde C_k es el condensador que crea la resonancia para el armónico de orden inferior de los dos considerados, y que actúa como cota superior y C_h es el que crea la resonancia para el armónico de orden superior, siendo una cota inferior. Las desigualdades que aparecen en el planteamiento del problema pueden ser

transformadas en igualdades introduciendo unas variables de holgura s_s y s_i:

$$\begin{aligned} \min_{C} \quad & I_{rs}^2 && (4.34)\\ \text{sujeto a} \quad & C - C_k + s_s = 0 && (4.35)\\ & C_h - C + s_i = 0 && (4.36) \end{aligned}$$

Dichas holguras s_s, correspondiente a una restricción de cota superior, y s_i, cota inferior, son variables que siempre deben permanecer positivas si se desea buscar el mínimo dentro de la región especificada.

Si se aplica la barrera logarítmica al problema planteado en las ecuaciones (4.34)-(4.36), la función lagrangiana toma la forma:

$$L = I_{rs}^2 + \alpha(C - C_k + s_s) + \beta(C_h - C + s_i) - \mu(\ln s_s + \ln s_i) \qquad (4.37)$$

donde μ es un factor de penalización positivo que debe disminuir conforme el proceso iterativo avanza. La manera en la que este parámetro decrece durante el proceso iterativo se analizará posteriormente en la Sección 4.4 del presente capítulo.

Las condiciones de optimalidad de primer orden para el problema planteado llevan a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial C} &= \frac{\partial I_{rs}^2}{\partial C} + \alpha - \beta = 0 && (4.38)\\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= C - C_k + s_s = 0 && (4.39)\\ \frac{\partial L}{\partial \beta} &= C_h - C + s_i = 0 && (4.40)\\ \frac{\partial L}{\partial s_s} &= \alpha - \frac{\mu}{s_s} = 0 \Rightarrow s_s\alpha = \mu && (4.41)\\ \frac{\partial L}{\partial s_i} &= \beta - \frac{\mu}{s_i} = 0 \Rightarrow s_i\beta = \mu && (4.42) \end{aligned}$$

Dado que μ y las holguras s_s y s_i deben ser positivos, los multiplicadores de Lagrange asociados, α y β, deben ser estrictamente positivos durante el proceso iterativo, por las ecuaciones (4.42)-(4.41). A partir de este momento estas variables serán referidas como holguras duales.

Las ecuaciones (4.38)-(4.42) se resuelven normalmente con una única iteración del método de Newton, pues se está resolviendo un problema modificado y no se consigue ninguna ventaja con resolver el problema alterado por las barreras logarítmicas de forma exacta. Esta resolución puede incluir un esquema

predictor-corrector [81], si bien en nuestro caso no ha llegado a ser necesario por ser el problema de pequeña dimensión. El sistema de ecuaciones a resolver, resultante de aplicar el método de Newton a las ecuaciones (4.38)-(4.42) es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 I_{rs}^2}{\partial C^2} & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & s_s & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & s_i & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangle C \\ \triangle \alpha \\ \triangle \beta \\ \triangle s_s \\ \triangle s_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial I_{rs}^2}{\partial C} + \alpha - \beta \\ C - C_k + s_s \\ C_h - C + s_i \\ s_s \alpha - \mu \\ s_i \beta - \mu \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

A la vista del sistema de ecuaciones, (4.43), se hace necesario calcular la primera y segundas derivadas de la intensidad reactiva al cuadrado:

$$\frac{\partial I_r^2}{\partial C} = \sum_{k \in N} 2 \left[(B_{lk} + B_{ck}) U_k - I_{gkr} \right] \left[\frac{\partial B_{ck}}{\partial C} U_k + \frac{\partial U_k}{\partial C} (B_{lk} + B_{ck}) \right] \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_r^2}{\partial C^2} &= \sum_k \left[\frac{\partial B_{ck}}{\partial C} U_k + (B_{lk} + B_{ck}) \frac{\partial U_k}{\partial C} \right]^2 + \\ &+ \left[(B_{lk} + B_{ck}) U_k - I_{gkr} \right] \left[2 \frac{\partial B_{ck}}{\partial C} \frac{\partial U_k}{\partial C} + (B_{ck} + B_{lk}) \frac{\partial^2 U_k}{\partial C^2} \right] \end{aligned} \tag{4.45}$$

Dado que la presencia de la impedancia del sistema hace que la tensión en la carga no sea constante, también es necesario calcular las derivadas de dicha tensión respecto a la capacidad del compensador:

$$U_k^2 = \frac{\left| \boldsymbol{U}_k + \boldsymbol{Z}_s \boldsymbol{I}_{gk} \right|^2}{\left| 1 + \boldsymbol{Z}_s (\boldsymbol{Y}_c + \boldsymbol{Y}_l) \right|^2} \tag{4.46}$$

$$\frac{\partial U_k^2}{\partial C} = 2 \frac{U_k^4 \left[X_{sk} - Z_{sk}^2 (B_{lk} + B_{ck}) \right] \frac{\partial B_{ck}}{\partial C}}{\left[U_k + R_{sk} I_{gka} - X_{sk} I_{gkr} \right]^2 + \left[X_{sk} I_{gka} + R_{sk} I_{gkr} \right]^2} \tag{4.47}$$

$$\frac{\partial^2 U_k^2}{\partial C^2} = \frac{4 U_k^2 \frac{\partial U_k^2}{\partial C} \left[X_{sk} - Z_{sk}^2 (B_{lk} + B_{ck}) \right] \frac{\partial B_{ck}}{\partial C} - 2 U_k^4 Z_{sk}^2 \left(\frac{\partial B_{ck}}{\partial C} \right)^2}{\left[U_k + R_{sk} I_{gka} - X_{sk} I_{gkr} \right]^2 + \left[X_{sk} I_{gka} + R_{sk} I_{gkr} \right]^2} \tag{4.48}$$

Dado que en (4.44) se tiene expresada en función de las variaciones de tensión respecto a la capacidad del condensador, hay que calcular la relación existente entre éstas y la derivada del cuadro del módulo de la tensión frente a la capacidad del condensador:

$$\frac{\partial U_k}{\partial C} = \frac{1}{2 U_k} \frac{\partial U_k^2}{\partial C} \tag{4.49}$$

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial C^2} = \frac{1}{2U_k}\frac{\partial^2 U_k^2}{\partial C^2} - \frac{1}{4U_k^3}\left(\frac{\partial U_k^2}{\partial C}\right)^2 \tag{4.50}$$

Las ecuaciones planteadas anteriormente son válidas para la compensación con condensador y filtro sintonizado, tomando la derivada de la susceptancia los siguientes valores:

- Batería de condensadores
$$\frac{\partial B_{ck}}{\partial C} = k\omega \tag{4.51}$$
- Filtro pasivo sintonizado al armónico k_h:
$$\frac{\partial B_{ck}}{\partial C} = \frac{k\omega}{1-(k/k_h)^2} \tag{4.52}$$

4.3.2 Compensación con banco de filtros sintonizados

4.3.2.1 Determinación de las resonancias

En caso de estar utilizando un banco de N filtros con frecuencias de sintonización fijas, la expresión que determina la resonancia del sistema es idéntica al caso de compensación con un filtro, (4.24), por lo que se llega a la ecuación de segundo orden (4.25) para la determinación de $B_{lk} + B_{ck}$. Es entonces cuando se puede calcular la susceptancia del compensador que provoca la resonancia del sistema. La resonancia en este caso está caracterizada por la siguiente ecuación:

$$B_{rck} = A_k - B_{lk} \tag{4.53}$$

donde A_k es la solución de la ecuación (4.25). La susceptancia del compensador que produce una resonancia en el armónico *k-esimo* se puede expresar en función del orden de los armónicos a los que están sintonizados los N filtros que lo componen, k_{hj} y las capacidades de los condensadores de dichos filtros, C_j:

$$B_{rck} = \sum_j^N \frac{k\omega C_j}{1-(k/k_{hj})^2} = A_k - B_{lk} \tag{4.54}$$

Dado que las frecuencias de sintonización son fijas, esta ecuación define un hiperplano que relaciona los valores de las capacidades de los condensadores de cada uno de los filtros. Todos los puntos que están contenidos en el mismo, valores de condensadores que verifican (4.54), producen una resonancia en el sistema para el armónico *k-esimo*. En este sentido, la minimización de la componente reactiva de la intensidad respecto a los N condensadores que

componen el banco de filtros, se realizará en una región del espacio $\mathbb{R}^N$ que se encontrará delimitada por hiperplanos de resonancia.

Al igual que sucede en el caso de compensación con un solo filtro, no se producen resonancias para todos los órdenes de armónicos. Para ilustrar este hecho y clarificar ciertas propiedades de estos hiperplanos, en la siguiente sección se estudiarán las resonancias para el caso de compensación con dos filtros.

4.3.2.2 Resonancias: banco de dos filtros

Al compensar con un banco de dos filtros pasivos el problema pasa a ser bidimensional. Esta simplificación permite realizar una representación gráfica de los hiperplanos de resonancia, que en este caso serán rectas que relacionan los valores de las capacidades de los condensadores de cada filtro. La ecuación de resonancia producida por un banco de dos filtros para el armónico *k-esimo* es:

$$\frac{k\omega}{1-(k/k_{hs})^2}C_s + \frac{k\omega}{1-(k/k_{hi})^2}C_i = A_k - B_{lk} \tag{4.55}$$

donde k_{hs} y C_s corresponden al filtro de frecuencia de sintonización más alta y k_{hi} y C_i al filtro de frecuencia de sintonización más baja. Si se expresa el valor de C_i en función de C_s:

$$C_i = -\frac{1-(k/k_{hi})^2}{1-(k/k_{hs})^2}C_s + (A_k - B_{lk})\frac{1-(k/k_{hi})^2}{k\omega} = m\,C_s + n \tag{4.56}$$

Dependiendo de la relación existente entre los armónicos sintonizados y el armónico para el que se estudia la resonancia tendremos distintos valores de m y n:

- Pendiente m. Puede tener valores positivos o negativos:

$$k < k_{hi} < k_{hs} \implies m < 0 \tag{4.57}$$
$$k_{hi} < k < k_{hs} \implies m > 0 \tag{4.58}$$
$$k_{hi} < k_{hs} < k \implies m < 0 \tag{4.59}$$

- Término independiente n:

$$\left.\begin{array}{ll} A_k - B_{lk} > 0 & k_{hs} > k \\ A_k - B_{lk} < 0 & k_{hs} < k \end{array}\right\} \implies n > 0 \tag{4.60}$$

$$\left.\begin{array}{ll} A_k - B_{lk} < 0 & k_{hs} > k \\ A_k - B_{lk} > 0 & k_{hs} < k \end{array}\right\} \implies n < 0 \tag{4.61}$$

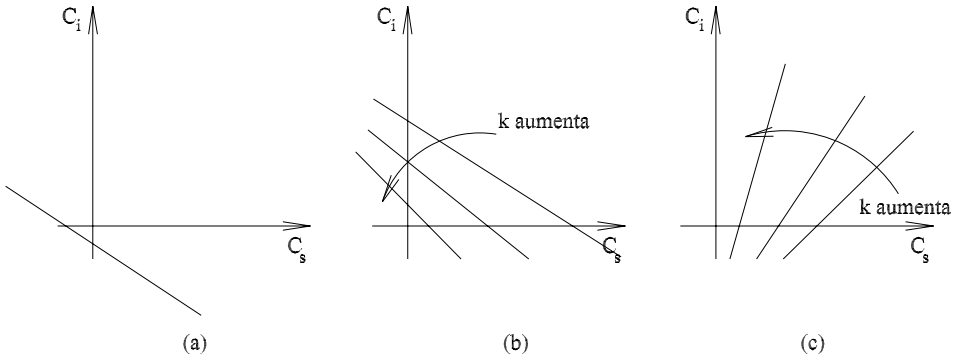


Figura 4.7: Posibles rectas de resonancia.

Normalmente, el término $A_k - B_{lk}$ es positivo por lo que la dependencia del signo del término independiente es función únicamente de k_{hs} y k.

En cualquiera de estos casos, para que la resonancia exista en el armónico *k-esimo* tiene que existir un rango de pares, (C_i, C_s), que sean mayores que cero, pues las capacidades de los condensadores han de ser positivas. De otra forma, algún valor negativo de capacidad, la resonancia no se produce, lo cual ocurrirá cuando el armónico *k-esimo* tenga una valor superior a k_{hi} y k_{hs}. En este caso, no debe olvidarse que el filtro se comporta como una bobina, por lo que es imposible que se produzca la resonancia entre éste y la impedancia del sistema.
En función de los valores de la pendiente m y el término independiente n, se tienen los siguientes tipos de rectas de resonancia:

- Armónicos mayores que la frecuencia de sintonización mayor k_{hs}. Para estos armónicos, los valores de m y n son negativos. Tal y como se muestra en la Figura 4.7.(a), no hay un conjunto de valores de capacidad de condensadores positivos, por lo que no hay resonancia.

- Armónicos menores que la frecuencia de sintonización menor k_{hi}. Para estos armónicos m es negativo y n es positivo, Figura 4.7.(b).

- Armónicos entre los armónicos sintonizados de los filtros k_{hi} y k_{hs}. En estos casos m es positivo y n negativo, Figura 4.7.(c).

Un análisis de la Figura 4.7 permite entender claramente la diferencia entre las rectas de resonancia para cada uno de los casos mencionados. Para ello, obsérvense los puntos de corte de las rectas con los ejes. Estos puntos expresan

el valor del condensador que crea la resonancia en el caso de estar compensando con un solo filtro, dado que el otro condensador es cero. De esta forma se observa que para el primer caso analizado los puntos de corte son valores negativos, lo cual indica que no hay resonancia. En el segundo, los dos puntos de corte son positivos, lo cual indica que se producirían resonancias si se compensara con un solo filtro. Esta situación es posible únicamente si los dos armónicos sintonizados son superiores al armónico donde se estudia la resonancia. Para el tercer caso, existe un punto de corte positivo, correspondiente al eje del filtro de frecuencia de sintonización mayor, y otro negativo. Claramente, el armónico estudiado debe estar comprendido entre los sintonizados por los filtros.

Por otra parte, es interesante conocer las relaciones que existen entre las pendientes y términos independientes de los distintos tipos de resonancias representados en la Figura 4.7:

- Armónicos menores que los sintonizados en los filtros. En este caso, que se muestra en la Figura 4.7.(b), el valor de la pendiente, m, es negativo, aumentando su valor absoluto con el aumento del orden de armónico; el término independiente n es positivo y disminuye con el aumento del orden de armónico.

- Armónicos entre los sintonizados en los filtros. En esta situación, Figura 4.7.(c), la pendiente de las rectas de resonancia, m, será positiva, y aumenta su valor con el orden de armónico, mientras que el término independiente es negativo y disminuye su valor absoluto con el aumento del armónico.

Estas rectas delimitan las regiones en las que se tienen que buscar los mínimos locales. Si bien en el caso de compensación con un único filtro o condensador el número de regiones a analizar es obvio, para más de un filtro, como se puede comprobar, dependerá del número de rectas de resonancia que aparezcan y de las intersecciones entre ellas. En este sentido, para el caso de dos filtros, las regiones podrían ser determinadas por consideraciones geométricas. Sin embargo, este método sería muy costoso cuando el número de filtros del banco aumentara. En la siguiente sección se estudiará la forma en la que se determinan las zonas factibles. De nuevo, para clarificar la exposición, se aplicará al caso de compensación con un banco de dos filtros, siendo fácilmente extrapolable a un número mayor.

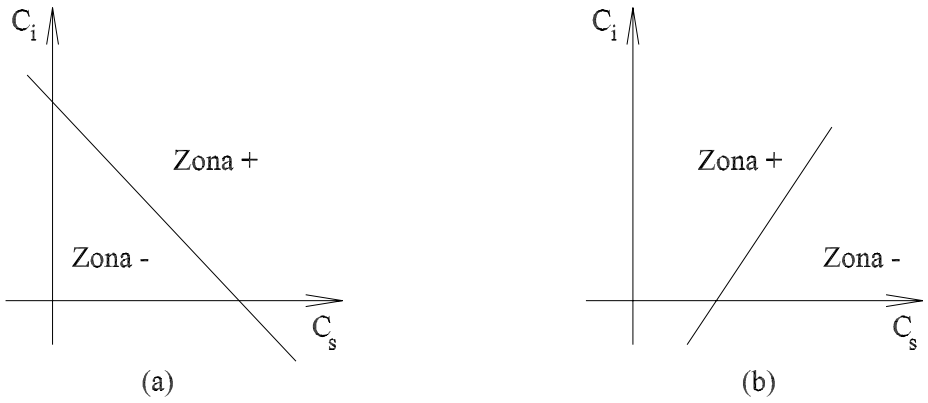


Figura 4.8: Regiones que crea una resonancia en el caso bidimensional.

4.3.2.3 Determinación de las zonas factibles

Una región factible es una parte del espacio $\mathbb{R}^N$ que cumple un conjunto de restricciones coherentes entre sí, en la que se tiene que buscar el mínimo local de la función a minimizar, que para este caso es la intensidad reactiva. Estas regiones factibles están delimitadas por los hiperplanos de resonancia. En general, el problema es cómo determinar las regiones factibles existentes a partir del conjunto de dichos hiperplanos.

Si se analiza el caso bidimensional, se puede comprobar que las rectas de resonancia dividen al plano en dos regiones. Las rectas de resonancia vendrán definidas por una expresión del tipo:

$$aC_i + bC_s + d = 0 \tag{4.62}$$

Los puntos no pertenecientes a la recta toman para la ecuación anterior valores positivos o negativos, dependiendo de su posición respecto a ésta. Si el coeficiente a, que multiplica al condensador del filtro de menor frecuencia de sintonización, es positivo, dichos valores son los que se indican en la Figura 4.8.

Una región vendrá dada por un sistema de desigualdades del tipo:

$$a_jC_i + b_jC_s + d_j \lesseqgtr 0 \quad j = 1 \ldots m \tag{4.63}$$

Dado que cada restricción divide al plano en dos regiones, el número máximo de zonas que pueden aparecer con estas m restricciones es 2^m. Sin embargo, no todas estas regiones van a ser factibles. Para estudiar si una determinada

región es válida, se añaden a las ecuaciones unas variables de holgura, s_j, estrictamente positivas:

$$a_j C_i + b_j C_s + d_j \pm s_j = 0 \quad s_j > 0 \quad j = 1 \dots m \tag{4.64}$$

Este sistema de ecuaciones puede escribirse de forma matricial como:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} a_1 & b_1 & \pm 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & b_m & 0 & \dots & \pm 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} C_s \\ C_i \\ \hline s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{array}\right] = - \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right] \tag{4.65}$$

$$A_{amp}\, x = -d \tag{4.66}$$

Claramente el sistema anterior es indeterminado, $m \times (m+2)$, pero puede resolverse si se igualan ciertas variables a cero, convirtiéndose el sistema en determinado. Igualar algunas variables a cero equivale a eliminar las columnas que multiplican a dichas variables. Es decir, que de la matriz A_{amp} se obtiene otra A de dimensión $m \times m$, tal que:

$$x_B = -A^{-1} d \tag{4.67}$$

La solución del sistema indeterminado estará compuesta de la solución del sistema anterior más las variables que se han igualado a cero:

$$x = [x_B \quad 0] \tag{4.68}$$

Dado que las capacidades de los condensadores y las holguras tienen que ser positivos, para que la región sea factible, la solución del sistema de ecuaciones (4.67) debe ser mayor que cero. En caso que esto no ocurra, se tiene que tomar otro conjunto de m variables de las $(m+2)$ posibles. Por tanto, en el peor de los casos, el número máximo de sistemas a resolver para comprobar la factibilidad de una región es:

$$\text{número de sistemas} = \left(\begin{array}{c} m+2 \\ m \end{array} \right) \tag{4.69}$$

El algoritmo que se plantea entonces para determinar las soluciones factibles en caso de compensar con N filtros a partir de un conjunto de m restricciones es el siguiente:

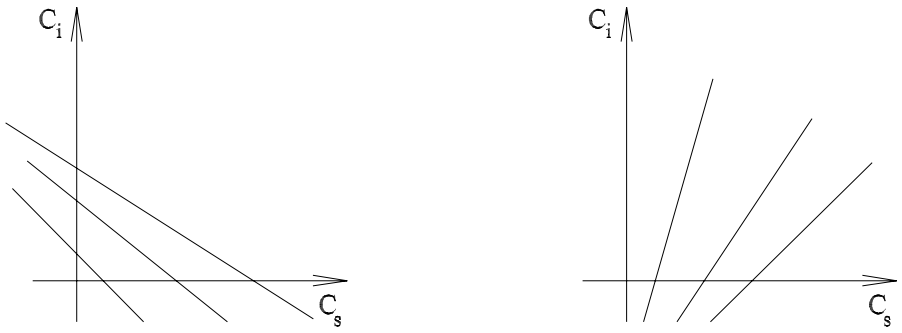


Figura 4.9: Casos en los que no se produce intersección de las resonancias.

1. Desde j=1 al número máximo de regiones factibles: 2^m

   1.1. Seleccionar una región y determinar la matriz ampliada: A_{amp}

   1.2. Desde k=1 a $\begin{pmatrix} m+N \\ m \end{pmatrix}$

      1.1.1. Formar la matriz A a partir de A_{amp} eliminado N columnas y resolver el sistema:

      $$Ax_B = -d \tag{4.70}$$

      1.1.2. Si la solución del sistema anterior, x_B es positiva, significa que todos las capacidades de los condensadores y las holguras son positivas, por lo que la región se marca como factible y se vuelve al punto 1.1. En caso contrario se vuelve al punto 1.1.1.

Es posible que a la salida de este algoritmo no se haya determinado ninguna región factible, indicando entonces que no existen puntos de corte entre las rectas de resonancia. Esta circunstancia indica que o todos los armónicos son inferiores a las frecuencias de sintonización de los filtros, como se indica en la Figura 4.9.(a) o bien están entre ellas, como en la Figura 4.9.(b). En este caso especial, aunque existen puntos de corte, pues las rectas de resonancia no son paralelas entre sí, estos se encuentran fuera del primer cuadrante, por lo que algún valor de los condensadores es negativo. En cualquiera de las casos anteriores es sencillo calcular las zonas factibles, siendo éstas las comprendidas entre las rectas de resonancia.

4.3.2.4 Formulación del problema

Una vez que se han encontrado las regiones factibles existentes, el objetivo es buscar los mínimos locales de las mismas, al igual que se hizo en el caso de una única variable. Las regiones factibles estarán limitadas por los hiperplanos de resonancia. En general, estas restricciones pueden ser cota superior o inferior para los valores de las capacidades de los condensadores de los filtros. El conjunto de m_s hiperplanos que actúa como cota superior, puede expresarse de la forma matricial que sigue:

$$A_s C + B_s < 0 \tag{4.71}$$

donde A_s es una matriz $m_s \times N$, C es un vector $N \times 1$ y B_s es un vector $m_s \times 1$. De igual manera se pueden agrupar las m_i restricciones que expresan una cota inferior:

$$A_i C + B_i > 0 \tag{4.72}$$

donde A_i es una matriz $m_i \times N$, C es un vector $N \times 1$ y B_i es un vector $m_i \times 1$.

El problema de minimización de la intensidad reactiva en una región delimitada por unos hiperplanos puede ser entonces planteado en forma compacta de la siguiente forma:

$$\min_{C} \quad I_{rs}^2 \tag{4.73}$$

$$\text{sujeto a} \quad A_s C + B_s < 0 \tag{4.74}$$

$$A_i C + B_i > 0 \tag{4.75}$$

Si se añaden dos vectores de variables auxiliares, x_s de dimensión $m_s \times 1$ y x_i de tamaño $m_i \times 1$, el problema se transforma de la siguiente forma:

$$\min_{C} \quad I_{rs}^2 \tag{4.76}$$

$$\text{sujeto a} \quad x_s + (A_s C + B_s) = 0 \tag{4.77}$$

$$x_i - (A_i C + B_i) = 0 \tag{4.78}$$

$$x_s > 0 \tag{4.79}$$

$$x_i > 0 \tag{4.80}$$

Con la introducción de estas variables auxiliares, x_s y x_i, se consigue que las restricciones de desigualdad estén planteadas en variables del problema, evitando así las restricciones funcionales de desigualdad.

Para eliminar las desigualdades se introducen unas variables de holgura, estrictamente positivas, que tendrán las mismas dimensiones que los vectores

de variables auxiliares introducidos anteriormente:

$$\begin{aligned}
\min_{C} \quad & I_{rs}^2 && (4.81)\\
\text{sujeto a} \quad & x_s + (A_s C + B_s) = 0 && (4.82)\\
& x_i - (A_i C + B_i) = 0 && (4.83)\\
& -x_s + s_s = 0 && (4.84)\\
& -x_i + s_i = 0 && (4.85)\\
& s_s, s_i > 0 && (4.86)
\end{aligned}$$

Aplicando la técnica de punto interior primal-dual de barrera logarítmica al problema planteado en las ecuaciones (4.81)-(4.86) se obtiene la siguiente lagrangiana:

$$\begin{aligned}
L = I_{rs}^2 \quad & + \quad \alpha^t(x_s + (A_s C + B_s)) + \beta^t(x_i - (A_i C + B_i)) + \\
& + \quad \hat{\alpha}^t(-x_s + s_s) + \hat{\beta}^t(-x_i + s_i) - \\
& - \quad \mu(\ln s_s + \ln s_i) && (4.87)
\end{aligned}$$

donde α, $\hat{\alpha}$ y β, $\hat{\beta}$ son vectores de los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones (4.82), (4.83) y (4.84), (4.85) que tienen dimensión $m_s \times 1$ y $m_i \times 1$ respectivamente. Las condiciones de optimalidad para el problema de optimización planteado se expresan en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial C} &= \frac{\partial I_{rs}^2}{\partial C} + \alpha^t A_s - \beta^t A_i = 0 && (4.88)\\
\frac{\partial L}{\partial x_s} &= \alpha - \hat{\alpha} = 0 && (4.89)\\
\frac{\partial L}{\partial x_i} &= \beta - \hat{\beta} = 0 && (4.90)\\
\frac{\partial L}{\partial \alpha} &= x_s + (A_s C + B_s) = 0 && (4.91)\\
\frac{\partial L}{\partial \beta} &= x_i - (A_i C + B_i) = 0 && (4.92)\\
\frac{\partial L}{\partial \hat{\alpha}} &= -x_s + s_s = 0 && (4.93)\\
\frac{\partial L}{\partial \hat{\beta}} &= -x_i + s_i = 0 && (4.94)\\
\frac{\partial L}{\partial s_s} &= 0 \Rightarrow S_s \alpha = \mu e && (4.95)\\
\frac{\partial L}{\partial s_i} &= 0 \Rightarrow S_i \beta = \mu e && (4.96)
\end{aligned}$$

donde e es un vector unitario de la dimensión apropiada.

El factor de penalización μ y las holguras s_s y s_i son estrictamente positivas, por lo que los vectores de multiplicadores de Lagrange α, β, $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ y las variables auxiliares introducidas, x_s y x_i, deben ser positivos durante el proceso iterativo.

Si se aplica el método de Newton para resolver las ecuaciones anteriores, tras el cálculo del jacobiano se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{c|cc|cc|cc|cc} \frac{\partial I_{rs}^2}{\partial C^2} & 0 & 0 & A_s & -A_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & -I & 0 & 0 \\ \hline A_s & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_i & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_s & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_i & 0 & \Theta \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \Delta C \\ \hline \Delta x_s \\ \Delta x_i \\ \hline \Delta \alpha \\ \Delta \beta \\ \hline \Delta \hat{\alpha} \\ \Delta \hat{\beta} \\ \hline \Delta s_s \\ \Delta s_i \end{array}\right] = - \left[\begin{array}{c} \frac{\partial I_{rs}^2}{\partial C} + \alpha^t A_s - \beta^t A_i \\ \hline \alpha - \hat{\alpha} \\ \beta - \hat{\beta} \\ \hline x_s + (A_s C + B_s) \\ x_i - (A_i C + B_i) \\ \hline -x_s + s_s \\ -x_i + s_i \\ \hline S_s \alpha - \mu e \\ S_i \beta - \mu e \end{array}\right] \tag{4.97}$$

En este sistema de ecuaciones se han introducido las siguientes matrices:

- I y e: matriz diagonal unidad y vector unitario de dimensiones apropiadas.
- S_s y S_i: matrices diagonales de dimensión $m_u \times m_u$ y $m_i \times m_i$ respectivamente, que contienen las holguras.
- Λ y Θ: matrices diagonales formadas por los multiplicadores de Lagrange correspondientes a las restricciones de cota superior, α, e inferior, β, respectivamente.

Para concluir la construcción del sistema de ecuaciones, quedan por calcular las derivadas de la intensidad reactiva y de la tensión en la carga respecto a las capacidades de los condensadores de cada uno de los filtros, que son idénticas a las expuestas en la sección anterior: ecuaciones (4.44), (4.45) y (4.47), (4.48). Los únicos términos que no se han calculado son las segundas derivadas de la intensidad reactiva y tensión en la carga respecto a capacidades de distintos filtros:

$$\frac{\partial I_{sr}^2}{\partial C_i \partial C_j} = 2 \sum_k \left[\frac{\partial B_{ck}}{\partial C_j} U_k + (B_{lk} + B_{ck}) \frac{\partial U_k}{\partial C_j}\right] \left[\frac{\partial B_{ck}}{\partial C_i} U_k + \frac{\partial U_k}{\partial C_i} (B_{lk} + B_{ck})\right] +$$

$$+ 2\sum_{k}\left[(B_{lk}+B_{ck})U_k - I_{gkr}\right]\left[\frac{\partial^2 B_{ck}}{\partial C_i \partial C_j}U_k + \frac{\partial B_{ck}}{\partial C_i}\frac{\partial U_k}{\partial C_j} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 U_k}{\partial C_i \partial C_j}(B_{lk}+B_{ck}) + \frac{\partial B_{ck}}{\partial C_j}\frac{\partial U_k}{\partial C_i}\right] \tag{4.98}$$

$$\frac{\partial^2 U_k^2}{\partial C^2} = \frac{4U_k^2 \frac{\partial U_k^2}{\partial C_j}\left[X_{sk} - Z_{sk}^2(B_{lk}+B_{ck})\right]\frac{\partial B_{ck}}{\partial C_i} - 2U_k^4 Z_{sk}^2 \frac{\partial B_{ck}}{\partial C_i}\frac{\partial B_{ck}}{\partial C_j}}{\left[U_k + R_{sk}I_{gka} - X_{sk}I_{gkr}\right]^2 + \left[X_{sk}I_{gka} + R_{sk}I_{gkr}\right]^2} \tag{4.99}$$

4.3.3 Restricciones adicionales

En las secciones anteriores se ha estudiado el problema de la minimización de la potencia reactiva en instalaciones industriales, que en el caso más general se puede plantear por las ecuaciones (4.81)-(4.86). Ya sea en el caso de compensación con condensador o filtro pasivo sintonizado, en el que el problema es monovariable o, en el más complejo, de compensación mediante un banco de filtro sintonizados, el problema consiste en minimizar una función en el interior de un conjunto de regiones. Dichas regiones tienen como fronteras las resonancias existentes en el sistema, representadas mediante una función lineal de la capacidad de los condensadores del compensador pasivo de potencia reactiva utilizado. Una vez que los mínimos locales de cada una de estas regiones ha sido calculado, se está en disposición de obtener el mínimo absoluto. Sin embargo, si se analizan aspectos prácticos de la instalación de filtros pasivos en los sistemas eléctricos, esta forma de diseño presenta dos inconvenientes:

- Uno de los principales inconvenientes que presentan los filtros pasivos para la eliminación de armónicos en redes eléctricas, descritos en el Capítulo 3, es su elevada sensibilidad a la variación de algunos de los parámetros que definen su comportamiento: impedancia de la red y sus propios componentes L, C. Si se analiza la impedancia equivalente desde el punto de acoplamiento del filtro frente a la frecuencia, se puede comprobar cómo existen unos mínimos en los armónicos en los que se sintonizan los filtros pasivos. Sin embargo, para frecuencias inferiores a estos armónicos aparecen unos máximos, que son los polos de la impedancia [21]. El control sobre la posición de estos máximos es de capital importancia si se quiere evitar que variaciones de los parámetros del filtro o la impedancia de la red provoquen el desplazamiento de los mismos hacia armónicos importantes. Con este método de diseño, no se tiene la certeza de que los máximos estén suficientemente alejados de los mínimos.

- Normalmente la definición utilizada de potencia reactiva es la enunciada por Budeanu para sistemas con tensiones senoidales y cargas lineales en régimen permanente. Por otra parte, según la legislación española vigente [25], [24], no debe existir ningún consumo con factor de potencia capacitivo. Esto se debe a que la medida de la potencia de reactiva se realiza considerando que tanto las tensiones como intensidades que existen en los sistemas eléctricos son magnitudes senoidales en regimen permanente. Con la formulación realizada, se está minimizando la potencia reactiva, o maximizando el factor de potencia definido por (4.1), pero no se tienen garantías de que dicha potencia reactiva en el armónico fundamental no sea capacitiva.

Para solventar estos problemas y adaptar el método propuesto a estos requerimientos se proponen las soluciones presentadas en las siguientes secciones.

4.3.3.1 Introducción de resonancias ficticias

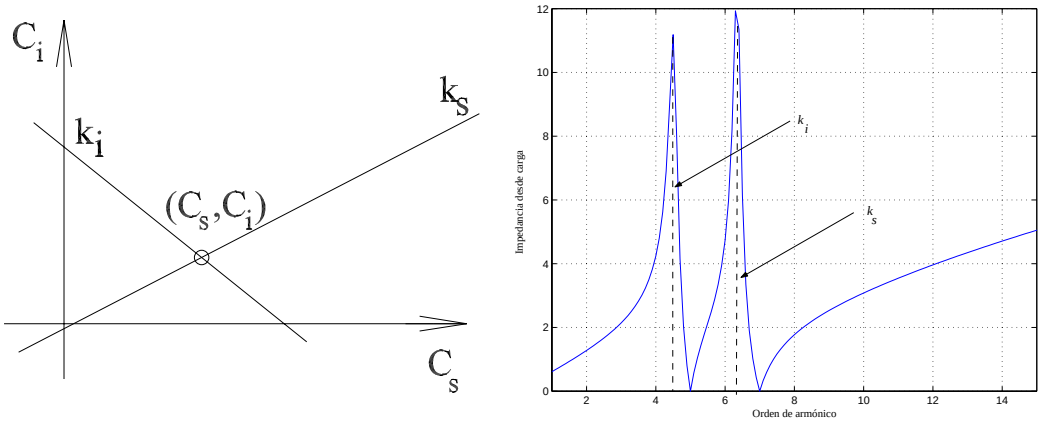
El objetivo que se persigue es inmunizar el comportamiento del banco de filtros ante la posible variación de los parámetros que definen su comportamiento. Para ello, se deben controlar los polos o máximos de la impedancia equivalente vista desde el punto de conexión del filtro.

Dado un diseño del banco de filtros pasivos mediante el proceso de optimización planteado, se puede representar cualquiera de las ganancias definidas en [21] y comentadas en el Capítulo 3. Considérese el caso de compensación con un banco formado por dos filtros pasivos. Si para este caso se representa la impedancia equivalente desde el punto de conexión de los filtros frente a la frecuencia, aparecen unos máximos que indican la amplificación que se produce en las tensiones de la carga debidas a los armónicos de intensidad generados por la carga no lineal, y unos mínimos a las frecuencias de sintonización de los filtros. Esta impedancia corresponde a los valores elegidos de la capacidad de los condensadores, existiendo una relación entre éstos y dicha impedancia. En este sentido, al tratarse de un problema bidimensional, se pueden representar las capacidades de los condensadores sobre el plano, definiendo así el punto de diseño. Por otra parte, es interesante recordar que las resonancias en el caso bidimensional pueden ser representadas en el plano mediante rectas cuya forma depende del armónico en el cual se produce la resonancia respecto a los armónicos sintonizados por los filtros. Al estar analizando la impedancia desde el punto de conexión de los filtros respecto a la frecuencia, las rectas de

resonancia adquieren la expresión:

$$\frac{k\omega}{1-(k/k_{hs})^2}C_s + \frac{k\omega}{1-(k/k_{hi})^2}C_i = -B_{lk} - B_{sk} \tag{4.100}$$

Dado que un punto está definido por la intersección de dos rectas, el punto de diseño, dado por los valores de las capacidades de los condensadores de los dos filtros se encuentra definido por la intersección de dos rectas con ecuación dada por (4.100), de la que no se conocen los armónicos de resonancia k_s y k_i, pero que pueden ser calculados. En la Figura 4.10.(a) se representa el punto de diseño definido por los condensadores C_s y C_i, y las rectas de resonancia que pasan por dicho punto. El armónico k_i-*esimo*, al ser menor que los armónicos k_{hi} y k_{hs}, define una recta de resonancia con pendiente negativa, mientras que el armónico k_s-*esimo* genera una recta de resonancia con pendiente positiva, al estar su valor comprendido entre los armónicos k_{hi} y k_{hs}. Los armónicos k_s-*esimo* y k_i-*esimo* definen las resonancias del sistema y, por tanto, coinciden con los máximos que presenta la impedancia al ser representada respecto a la frecuencia, tal y como se puede ver en la Figura 4.10.(b).



(a) (b)

Figura 4.10: Punto de diseño y resonancias.(a) Punto de diseño en el plano $C_s - C_i$. (b) Impedancia equivalente desde la carga.

De este modo, si se quiere tener un control sobre la posición de los máximos de la impedancia frente a la frecuencia, y así diseñar el filtro con inmunidad frente a variación de los parámetros, se pueden añadir restricciones adicionales, que, para el caso bidimensional, son de la forma:

$$\frac{k_{ilim}\omega}{1-(k_{ilim}/k_{hs})^2}C_s + \frac{k_{ilim}\omega}{1-(k_{ilim}/k_{hi})^2}C_i + B_{lki} + B_{ski} > 0 \tag{4.101}$$

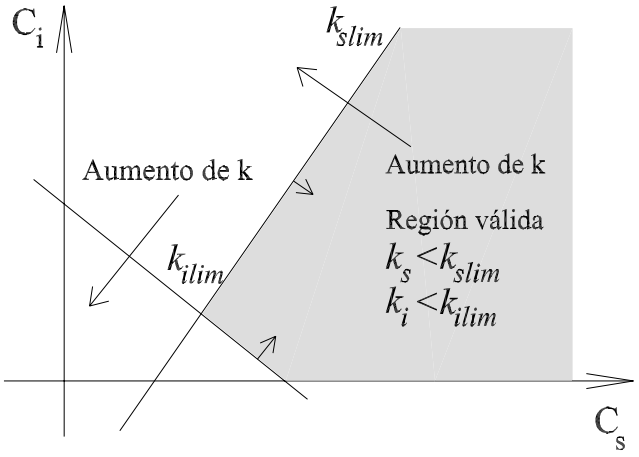


Figura 4.11: Introducción de resonancias ficticias y zona factible.

$$\frac{k_{slim}\omega}{1-(k_{slim}/k_{hs})^2}C_s + \frac{k_{slim}\omega}{1-(k_{slim}/k_{hi})^2}C_i + B_{lks} + B_{sks} < 0 \qquad (4.102)$$

donde k_{ilim} y k_{slim} son los valores máximos de los armónicos donde se pueden situar las resonancias y B_{lki}, B_{lks} y B_{ski}, B_{sks} son las susceptancias de la carga y la red a dichas frecuencias, respectivamente.

Estas ecuaciones se plantean atendiendo tanto a la topología de las rectas de resonancia y a las regiones que éstas crean, según puede observarse en las figuras 4.7 y 4.8 respectivamente. La representación de estas restricciones en el plano se muestra en la Figura 4.11. La restricción impuesta por (4.106) impide que la resonancia se desplace hacia valores superiores de k_{ilim}, mientras que (4.102) actúa para que no se sobrepase a k_{slim}.

Por último, el ajuste de los parámetros k_i y k_s, para el caso bidimensional, depende de la distancia mínima que se desee tener entre los máximos y los mínimos que presenta la impedancia equivalente vista desde el punto de conexión del banco de filtros. Esta distancia mínima debe prevenir que los máximos se sitúen sobre los mínimos originales después de un cambio de los parámetros que definen el banco de filtros. En este sentido, una de las causas más frecuentes de desintonización de filtros que presenta este problema, es la pérdida de capacidad de los condensadores por envejecimiento. Al disminuir la capacidad, la frecuencia de sintonización del filtro aumenta, por lo que el máximo se desplaza hacia zonas cercanas a un armónico importante, pudiendo crear serios problemas de resonancia. La relación existente entre la variación de los parámetros del filtro y la frecuencia de sintonización, considerando nula

la variación de la reactancia del filtro, se puede calcular por la expresión:

$$\frac{k_h}{k_{h0}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tag{4.103}$$

siendo k_h la nueva frecuencia de sintonización, k_{h0} la frecuencia de sintonización original y α la variación del condensador expresada en por unidad. De esta forma disminuciones de la capacidad del condensador del 15% tendrían como resultado un desplazamiento relativo de la frecuencia de 1.085. Así, el filtro sintonizado al 5^o armónico se desplazaría al 5.42, el 7^o armónico al 7.59 y el 11^{er} armónico 11.93.

4.3.3.2 Restricción de potencia reactiva en el armónico fundamental

La minimización de potencia reactiva planteada por (4.81)-(4.86) no garantiza que el conjunto formado por la carga y el compensador pasivo actúen como una carga no capacitiva para el armónico fundamental. De la misma manera que se ha realizado en la sección anterior, esta restricción sobre la potencia reactiva para el armónico fundamental puede expresarse de forma simple. Mediante la descomposición ortogonal de la intensidad (4.7), el valor eficaz del armónico fundamental de la intensidad reactiva respecto a la tensión existente en la carga es:

$$I_{r1} = (B_{l1} + B_{c1})U_1 - I_{g1r} \tag{4.104}$$

donde B_{l1} es la susceptancia de la parte lineal de la carga, B_{c1} es la susceptancia del compensador pasivo utilizado, U_1 es el valor eficaz del armónico fundamental de la tensión e I_{g1r} es la intensidad reactiva en el fundamental de la carga no lineal. Si se desea que la compensación en el fundamental no sea capacitiva, la restricción que hay que imponer es:

$$I_{r1} < 0 \Longrightarrow (B_{l1} + B_{c1})U_1 - I_{g1r} < 0 \tag{4.105}$$

Volviendo al caso de compensación mediante un banco de dos filtros sintonizados, y tal como se ve en la Figura 4.12, (4.105) es una recta sobre el plano definido por los condensadores de los filtros C_s y C_i, pudiendo ser expresada esta restricción de la siguiente forma:

$$\frac{\omega}{1-(1/k_{hs})^2}C_s + \frac{\omega}{1-(1/k_{hi})^2}C_i + B_{lk} - \frac{I_{g1r}}{U_1} < 0 \tag{4.106}$$

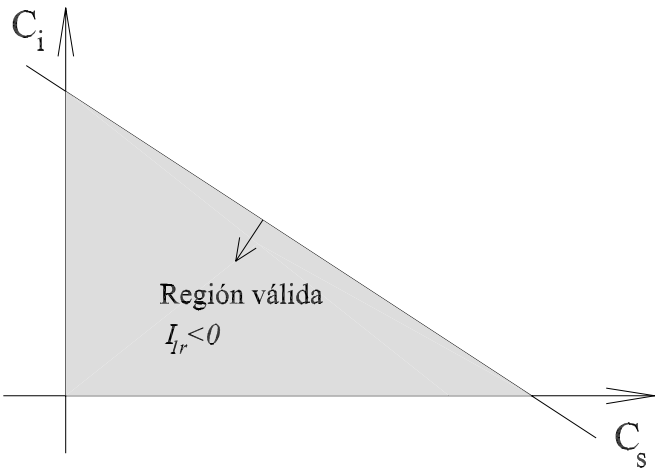


Figura 4.12: Restricción de potencia reactiva en el armónico fundamental.

4.4 Diseño del algoritmo de punto interior

En esta sección se indicarán todos los detalles que han sido considerados para aplicar el algoritmo primal-dual de barrera logarítmica al problema de minimización de reactiva en regímenes no senoidales. El proceso a seguir para minimizar la intensidad reactiva se puede resumir en los siguientes puntos:

- Búsqueda de las regiones factibles. Una vez conocidas las frecuencias de sintonización del banco de filtros que se va a instalar, los armónicos de tensión e intensidad y las distintas impedancias presentes en el problema, es posible determinar los hiperplanos de resonancia. A partir de los mismos, tal como se explicó en la Sección 4.3.2.3, se determinan las zonas factibles. En cada una de estas zonas se buscará un mínimo local, resolviendo el problema de optimización planteado en las ecuaciones (4.97), con las consideraciones de ejecución que aquí se exponen.

- Solución inicial. El proceso de optimización necesita unos valores iniciales para las variables implicadas en el mismo. Por tanto, se necesitan inicializar las siguientes variables:

  - Capacidades de los condensadores de cada uno de los filtros. A todos los condensadores se le asigna como valor inicial $10^{-4} s/rad.$. Este ajuste es heurístico, siendo el que mejores características de convergencia presenta para todos los casos que han sido estudiados. Es evidente que, iniciando las capacidades de los condensadores de

este modo, no es posible asegurar que el punto inicial esté dentro de la región factible que se está analizando. Sin embargo, esto no es necesario, ya que que las únicas condiciones que se tienen que cumplir para aplicar el algoritmo primal-dual de barrera logarítmica son las de positividad de algunas de sus variables, en este caso capacidades, factor de penalización, holguras y variables duales. Conforme el número de iteraciones del algoritmo vaya aumentando, se estará más cerca de cumplir las condiciones de optimalidad planteadas en las ecuaciones (4.88)-(4.96) y, por tanto, la solución se encaminará al interior de la región especificada.

- Factor de penalización μ. Se inicializa con un valor positivo lo suficientemente grande para que el término de penalización logarítmico sea el predominante en la función objetivo durante las primeras iteraciones. De esta forma se consigue que, al inicio del proceso iterativo, la solución se aleje de las barreras y se desplace hacia el interior de la zona factible bajo estudio. El factor de penalización disminuye con el número de iteraciones, de forma que, cuando es suficientemente pequeño, la solución tiende al mínimo de la zona que se estudia. En este caso, el factor de penalización se iguala inicialmente a 100.
- Variables de holgura primales. Las holguras primales, s_s y s_i del problema deben ser todas positivas e inicialmente toman el valor 10^{-3}. A partir de estos valores se calcula el valor inicial de las variables auxiliares, x_s y x_i, mediante las ecuaciones (4.93) y (4.94).
- Variables de holgura duales. Las holguras duales son las que se introducen en el problema original cuando se plantea la función lagrangiana. En este caso dichas holguras son α, β, $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$. Dichas variables se inicializan a partir de los valores de las holguras primales y el factor de penalización, teniendo en cuenta las ecuaciones (4.89)-(4.90) y (4.95)-(4.96).

- Determinación del tamaño del paso de avance. La resolución de las condiciones de optimalidad mediante la aplicación de una iteración del método de Newton, sistema de ecuaciones (4.97), determina la dirección del gradiente, a partir de la cual todas las variables deben ser actualizadas. Sin embargo, se tiene que tener en cuenta que las variables primales, s_s, s_i, x_s, x_i, y duales, α, β, $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ deben permanecer estrictamente positivas durante todo el proceso iterativo. Por estos motivos, se debe determinar

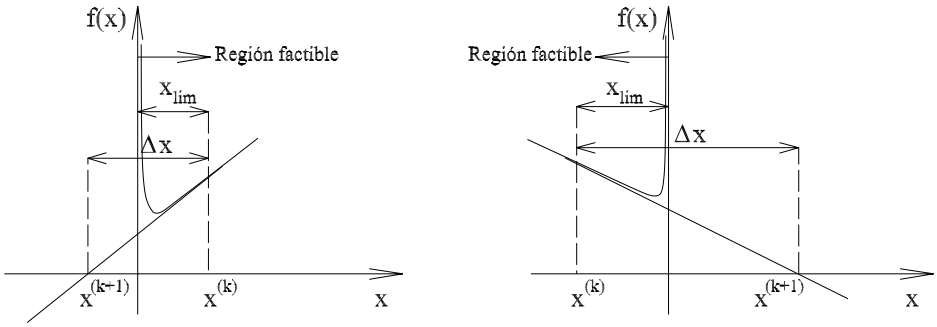


Figura 4.13: Cálculo del factor de avance.

el paso máximo de avance en la dirección del gradiente calculado previamente para que ninguna de las variables antes mencionadas se haga negativa, tal y como se muestra en la Figura 4.13. Dicho factor de avance para la iteración $k+1$, $\alpha^{(k+1)}$, se calcula mediante la expresión:

$$\alpha^{(k+1)} = \min\left(1, \frac{\Delta v_i^{(k+1)}}{v_i^{(k)}}\right) \quad \forall i \tag{4.107}$$

donde v es un vector que contiene todas las variables de holgura primales y duales enumeradas anteriormente.

Una vez se ha calculado el valor del factor de avance, todas las variables del problema se actualizan de acuerdo con la siguiente expresión:

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + \alpha^{(k)} \Delta y^{(k)} \tag{4.108}$$

- Ajuste del factor de penalización. Conforme el número de iteraciones aumenta, el factor de penalización μ debe disminuir para que al final del proceso iterativo la influencia del término de penalización dentro de la función objetivo modificada sea despreciable. Dentro de las diferentes formas de actualizar este factor en cada iteración, se ha elegido que sea proporcional al error medio de dualidad, que se define de la siguiente manera:

$$E_d^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i^{(k)} \hat{\alpha}_i^{(k)}}{m} \tag{4.109}$$

De esta forma, el factor de penalización se actualiza para cada iteración:

$$\mu^{(k)} = \gamma E_d^{(k)} = \gamma \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i^{(k)} \hat{\alpha}_i^{(k)}}{m} \tag{4.110}$$

donde $0 < \gamma < 1$ tomándose en esta aplicación $\gamma = 0.1$.

- Criterio de parada. El proceso iterativo debe terminar cuando se produzca alguna de las siguientes situaciones:
  - Error de dualidad pequeño. Si el error de dualidad cumple esta condición significa que el parámetro μ, calculado mediante (4.110), es pequeño [40]. Esto implica que la influencia que la barrera logarítmica tiene sobre la función objetivo original es despreciable. El error de dualidad puede decrecer porque, o bien las holguras, o las variables duales, son pequeñas. En el primer caso, el mínimo de la función modificada que cumple las condiciones de optimalidad está situado extremadamente cerca de una restricción activa. Normalmente, se puede comprobar al analizar la función original que dicho mínimo tiene un gradiente distinto de cero. El proceso iterativo en este caso finaliza, aun cuando el gradiente es no nulo, debido a que se alcanza una restricción. En el segundo caso, si las variables duales son pequeñas significa que se está lejos de las restricciones, éstas no están activas, lo cual indica que la solución está en el interior de la región estudiada y dentro de ella se ha encontrado el mínimo.
  - Norma del gradiente suficientemente pequeña. Esto significa que se cumplen las condiciones de optimalidad y que se ha alcanzado un mínimo local en la región estudiada.

4.5 Resumen del capítulo

En este capítulo se ha desarrollado el método de diseño de filtros pasivos propuesto en la presente tesis. El objetivo que se ha perseguido es el establecimiento de un reparto, de forma razonada, de la potencia reactiva entre los distintos filtros que componen un banco. En este sentido, el criterio seleccionado a tal efecto ha sido la minimización de la potencia reactiva o de la componente reactiva de la intensidad respecto a la tensión de la carga.

Dado que el objeto de la tesis son lo sistemas eléctricos de potencia industriales, la teoría de potencia reactiva seleccionada es la desarrollada por Ferrero y Superti-Furga, justificada en la Sección 3.2.2.1.4 del Capítulo 3 y Sección 4.2.1 del presente capítulo. Obtenida la función que se desea minimizar, se establecen las ecuaciones para los casos de impedancia infinita y finita, siendo este último el núcleo central de la tesis. El problema de considerar la impedancia del sistema, como se ha podido comprobar, es doble: no linealidad de la función a minimizar y aparición de resonancias del sistema. Ambos inconvenientes están estrechamente ligados, pues las resonancias son

precisamente las causantes de la no linealidad de la función. De hecho, debido al carácter no lineal, existen múltiples mínimos locales cada uno de los cuales está en una región que está delimitada por resonancias. Estas resonancias siempre y cuando las frecuencias de sintonización de los filtros sean fijas, son unas restricciones lineales en las capacidades de los condensadores de los filtros instalados. Con estas consideraciones, el mínimo debe ser buscado en una determinada región del espacio delimitada por estas resonancias, siendo indispensable que la búsqueda de la solución se circunscriba a la región bajo estudio. Por estos motivos, se selecciona para minimizar la función objetivo el método de punto interior primal-dual de barrera logarítmica.

La descripción que se realiza del algoritmo es completa, pues se analizan la topología de las rectas de resonancia, las regiones factibles existentes a partir de éstas, así como la formulación matemática del algoritmo.

Por último, se establecen una serie de restricciones adicionales, además de las impuestas por las resonancias, para resolver algunos de los problemas de índole práctica que se presentan en el diseño de filtros pasivos. Estas restricciones por una parte controlan los nuevos puntos de resonancia que se introducen en la red por la adición del banco de filtros, y por otra impiden que el conjunto formado por los filtros y la carga tenga un carácter capacitivo en el armónico fundamental.

Una vez planteado el problema de forma matemática es conveniente aplicarlo a un sistema concreto, para poder establecer así el comportamiento de los distintos parámetros que intervienen en la optimización, lo cual se desarrolla en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Ejemplos de aplicación

5.1 Introducción

En el presente capítulo se hará una aplicación numérica a casos concretos del algoritmo de punto interior analizado anteriormente. El objetivo que se persigue es doble:

- Por una parte se pretende caracterizar el funcionamiento de la compensación de potencia reactiva mediante los distintos tipos de elementos pasivos estudiados: condensadores y filtros pasivos. Para ello, además de analizar la evolución de los armónicos característicos presentes en la instalación, se tendrán en cuenta tres parámetros que caracterizan de forma global la compensación realizada:
  - Dimensionado de los elementos pasivos a instalar. En el caso de filtros sintonizados se especificará el valor de la capacidad de los condensadores de cada filtro. El valor de la inductancia de la bobina asociada a estos queda determinada a partir de la frecuencia de sintonización de cada uno de los filtros.
  - Valor eficaz de la intensidad de la fuente. El objetivo de la instalación de compensadores pasivos es la minimización de las componentes reactivas de la intensidad respecto a la tensión de alimentación en la carga, lo cual conlleva la reducción de la potencia reactiva demandada. Se compararán los valores obtenidos antes y después de la compensación para así comprobar si la reducción obtenida es sustancial. Concretamente, se expresará el cociente entre el valor eficaz de la intensidad después de la compensación y el existente inicialmente.

– Distorsión armónica de tensión e intensidad. La distorsión armónica de una señal es una medida global del contenido armónico de la misma, y se define como el cociente entre el valor eficaz de las componentes armónicas respecto a la fundamental:

$$THD_x = \frac{\sqrt{\sum_{k>1} X_k^2}}{X_1} \tag{5.1}$$

La utilización de condensadores para la compensación de reactiva cuando existen tensiones e intensidades no senoidales tiene como inconveniente el aumento de los armónicos de tensión y de intensidad. Con la utilización de filtros pasivos puede conseguirse, además de la compensación requerida, una disminución del contenido armónico de tensiones e intensidades del sistema, con el consiguiente aumento de la calidad de suministro.

En los casos prácticos presentados se tendrán en cuenta las variaciones de los parámetros más relevantes que intervienen en el proceso de optimización de los compensadores pasivos, y estudiar así cómo afectan a la compensación realizada [87]. En particular, se analizará la variación de los parámetros globales enunciados frente a la distorsión de la tensión del sistema, la distorsión generada por la carga no lineal, el factor de potencia de la carga, la impedancia de alimentación y la frecuencia de sintonización de los filtros.

- Por otra parte, se estudiarán aspectos numéricos del proceso de optimización. El método utilizado para minimizar consiste en la modificación de la función objetivo mediante unas barreras logarítmicas ajustadas en los límites de la región bajo estudio. Conforme el proceso iterativo avanza, el peso relativo que estas penalizaciones tienen en la función objetivo (parámetro μ) se va reduciendo en función del error medio de dualidad. Concretamente se analizará cómo varían el factor de penalización, el error medio de dualidad y la función objetivo respecto al número de iteraciones. Este análisis se efectuará en el caso de compensación con un banco de dos filtros sintonizados, debido a que, además de poder estudiar los parámetros ya mencionados, permite realizar una representación del valor eficaz de la intensidad frente a los valores de la capacidad de ambos filtros. Esto permite comprobar como varía esta función durante el proceso iterativo debido a la modificación de las funciones de penalización.

5.2 Consideraciones generales

En la Figura 5.1 se muestra el esquema unifilar que se va a utilizar para ilustrar el método de optimización de compensadores pasivos. Se trata de un sistema de distribución que parte de una subestación 66kV/20kV con un transformador de 10 MVA de potencia, que alimenta a través de una línea aérea de 10 km de longitud a una industria que demanda 1.25 MVA con un factor de potencia global de 0.8. Los valores de impedancia de cada uno de los elementos, en ohmios a 50 Hz y en por unidad, tomando como base la potencia nominal del transformador, se encuentran resumidos en la Tabla 5.1.

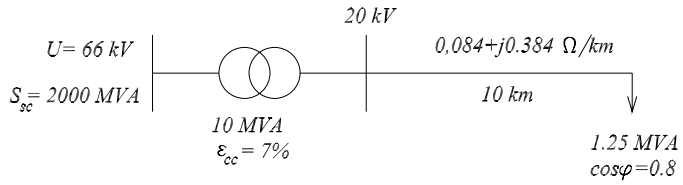


Figura 5.1: Esquema unifilar de la red a estudiar.

Tabla 5.1: Impedancias de la red de distribución de la Figura 5.1.

	Resistencia		Reactancia	
	Ω	(p.u.)	Ω	(p.u.)
Red	0	0	2.17	0.005
Transformador	0	0	2.8	0.07
Línea	0.844	0.0211	3.84	0.0966

Tanto la tensión de alimentación en la barra de 66 kV, como la potencia demandada por la instalación industrial pueden estar distorsionadas:

- Tensión de alimentación. La norma europea EN 50160 [13], fija los límites de armónicos que se pueden tener en los sistemas públicos de distribución de energía eléctrica (Tabla 5.2). Además de estos límites individuales para cada armónico, la norma especifica que la distorsión total de tensión no puede ser superior al 8%.

  El valor relativo de los armónicos de la tensión de alimentación que se utiliza en esta aplicación corresponde a los valores de la Tabla 5.2. De

Tabla 5.2: Niveles máximos de armónicos permitidos en redes de distribución públicas según EN50160.

Orden armónico	Tensión (%)	Orden armónico	Tensión (%)	Orden armónico	Tensión (%)
2	2	3	5	4	1
5	6	6	0.5	7	5
8	0.5	9	1.5	10	0.5
11	3.5	12	0.5	13	3
14	0.5	15	0.5	16	0.5
17	2	18	0.5	19	1.5
20	0.5	21	0.5	22	0.5
23	1.5	24	0.5	25	1.5

este modo, dada una tasa de distorsión global, los armónicos de tensión toman el valor de la tabla multiplicados por el factor:

$$\beta_u = \frac{THD_u}{\sqrt{\sum_{k>1} U_k^2}} \tag{5.2}$$

- Intensidad de la carga. La intensidad demandada por la instalación industrial tendrá una componente fundamental más unos armónicos. El patrón de armónicos que se elige es el de un rectificador controlado de seis pulsos que se muestra en la Tabla 5.3 [85]. Es importante recalcar que, tal y como puede comprobarse, existen armónicos múltiplos de tres en la intensidad demandada por dicho rectificador. Sin embargo, estas intensidades no son de secuencia homopolar, pues el rectificador se alimenta desde la red mediante un transformador con el neutro aislado. Dichos armónicos pueden ser tan solo de secuencia directa o inversa, debido a asimetrías del circuito o defectuosa generación de los instantes de disparo. En lo que sigue, estos armónicos serán considerados de secuencia directa o inversa aleatoriamente.

  Para la realización de los ejemplos, se mantiene la intensidad eficaz demanda constante, por lo que la variación del contenido armónico de la intensidad se realiza a través de la variación de la distorsión de intensidad. Si la distorsión de intensidad de los armónicos de la Tabla 5.3 es THD_{ir}, y se desea tener una distorsión de intensidad THD_i, los armóni-

Tabla 5.3: Contenido armónico de la intensidad no lineal.

Orden armónico	Inten. (%)	Orden armónico	Inten. (%)	Orden armónico	Inten. (%)
2	0.4	8	0.7	17	4.5
3	1.6	9	1.4	19	2.8
4	0.5	10	0.3	23	2.8
5	21	11	8	25	1.7
6	0.6	12	0.8	29	1.9
7	11	13	4.8	31	1

cos se calculan mediante la multiplicación de los armónicos de la Tabla 5.3 por el coeficiente:

$$\beta_i = \frac{THD_i}{THD_{ir}} \tag{5.3}$$

Posteriormente se ajusta la impedancia de la carga para que el valor de la componente fundamental sea tal que la intensidad eficaz demandada sea constante.

Para comparar las distintos métodos de compensación, mediante condensador o filtros pasivos, se mostrarán para cada caso analizado los valores del condensador óptimo, valor eficaz de la intensidad y distorsiones de tensión e intensidad después de la compensación. A continuación, se indican los detalles más relevantes de la forma en la que se expresan cada uno de los resultados mencionados:

- Condensador óptimo. Al estar trabajando con los parámetros la red de la Figura 5.1 expresados en por unidad, el condensador, si se toman como base las expresiones desarrolladas en el Capítulo 4, tiene unidades de $F\Omega$, o lo que es lo mismo, de s/rad:

$$Z_c[p.u.] = \frac{1}{\omega[rad/s]C} \Longrightarrow C\left[\frac{s}{rad}\right] \equiv [F\Omega] \tag{5.4}$$

- Valor eficaz de la intensidad después de la compensación. La intensidad se refiere siempre al valor que ésta tiene antes de realizar la compensación.

- Distorsiones de intensidad y tensión. Al igual que el valor eficaz de intensidad, las tasas de distorsión se presentan referidas a sus valores previos a la compensación.

5.3 Compensación con condensador

El problema de la compensación de la potencia reactiva mediante condensadores en el caso de tensiones e intensidades no senoidales presenta dos inconvenientes. Desde el punto de vista matemático, se tiene un problema fuertemente no lineal debido a la presencia de resonancias. Técnicamente, aunque el factor de potencia de la instalación se incrementa, los condensadores constituyen un camino de pequeña impedancia para los armónicos, por lo que las distorsiones de tensión e intensidad aumentan considerablemente.

En la Figura 5.2 se muestra el valor eficaz de la intensidad en función del valor del condensador, y el óptimo que alcanza el algoritmo de minimización al ser aplicado a la red de distribución de la Figura 5.1. Las intensidades vienen expresadas respecto al valor existente antes de la compensación, y el condensador en s/rad, respecto a la impedancia que se ha tomado como base. En dicha figura se advierte claramente la presencia de resonancias, de forma que conforme disminuye el valor del condensador instalado aumenta el orden de armónico en el cual se produce la resonancia. Los valores de distorsión de la tensión de la red, intensidad no lineal y factor de potencia de la carga lineal con los que se ha realizado el ejemplo, así como la comparación entre las distintas magnitudes antes y después de la compensación, se resumen en

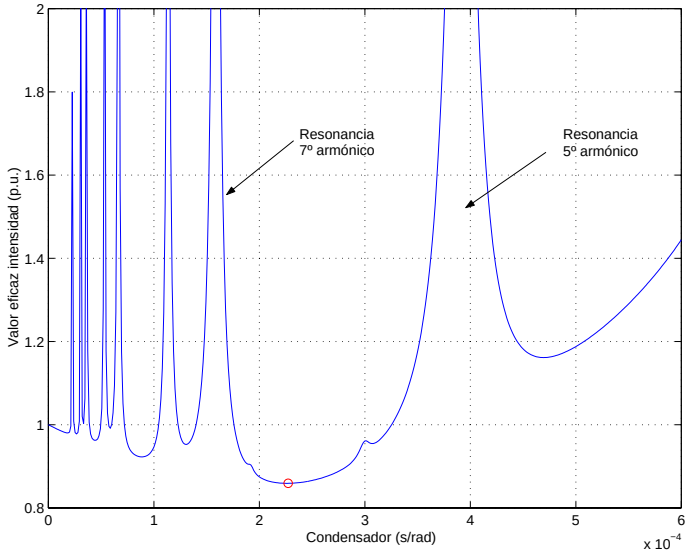


Figura 5.2: Compensación con condensador. Valor eficaz de la intensidad frente a la capacidad del condensador.

Tabla 5.4: Compensación con condensador. Resumen de resultados del proceso de optimización.

Datos iniciales			
Distorsión de tensión (%)			0.8
Distorsión de intensidad (%)			20
Factor de potencia			0.8
Parámetros del condensador			
Condensador (s/rad)		$2.273 \cdot 10^{-4}$	
Resultados obtenidos			
Magnitud	Intensidad (p.u.)	THDi (%)	THDu (%)
Antes	1	19.28	3.42
Después	0.85	40.89	8.98

la Tabla 5.4. En el apartado de resultados, el valor eficaz y la distorsión de intensidad corresponden a la intensidad del sistema, mientras que la distorsión de tensión es la correspondiente a la carga.

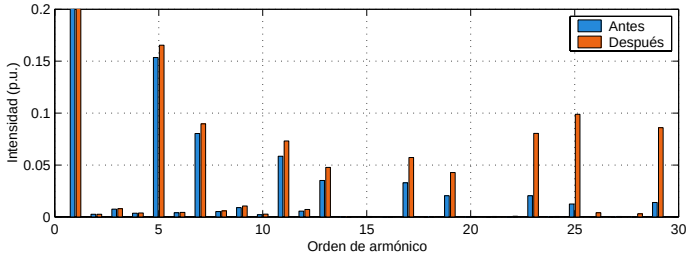
En la Figura 5.3 se comparan el espectro armónico y las representaciones temporales de las tensiones en la carga e intensidades del sistema, respectivamente, antes y después de efectuar la compensación. En el espectro armónico, Figura 5.3.(a), se observa un aumento de las componentes de alta frecuencia, lo cual se traduce en un mayor rizado de tensión e intensidad cuando estas magnitudes se representan en el dominio del tiempo.

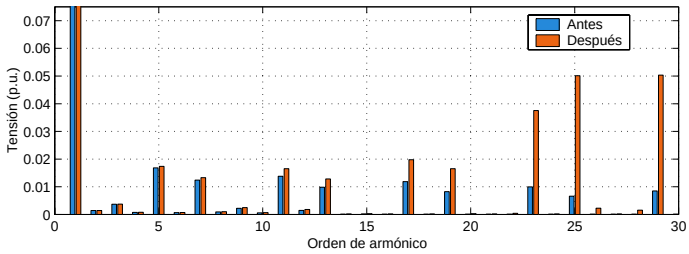
A continuación se analizará cómo afectan la distorsión de intensidad de la carga, la distorsión de tensión de la fuente y la longitud de la línea a los parámetros que se utilizan para evaluar la compensación de potencia reactiva efectuada.

5.3.1 Distorsión de intensidad

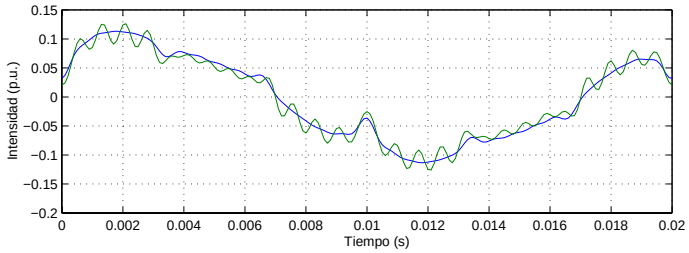
La influencia de la distorsión de intensidad se refleja en las figuras 5.4 y 5.5. Para ello se varía la distorsión de intensidad de la carga mientras que su factor de potencia permanece constante a 0.8. La distorsión de la tensión en la barra de 66 kV permanece asimismo constante e igual a 0.8%.

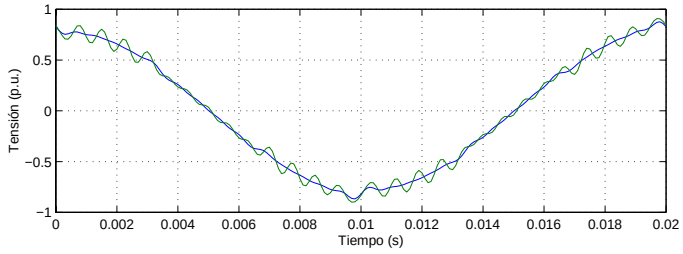
En la Figura 5.4 se puede observar cómo la reducción de valor eficaz de intensidad que se consigue va disminuyendo conforme la distorsión de la carga no lineal va aumentando hasta puntos en los que no se consigue una mejora





(a)





(b)

Figura 5.3: Compensación con condensador. (a) Espectro armónico de intensidad y tensión antes y después de la compensación. (b) Intensidad y tensión de fase antes y después de la compensación.

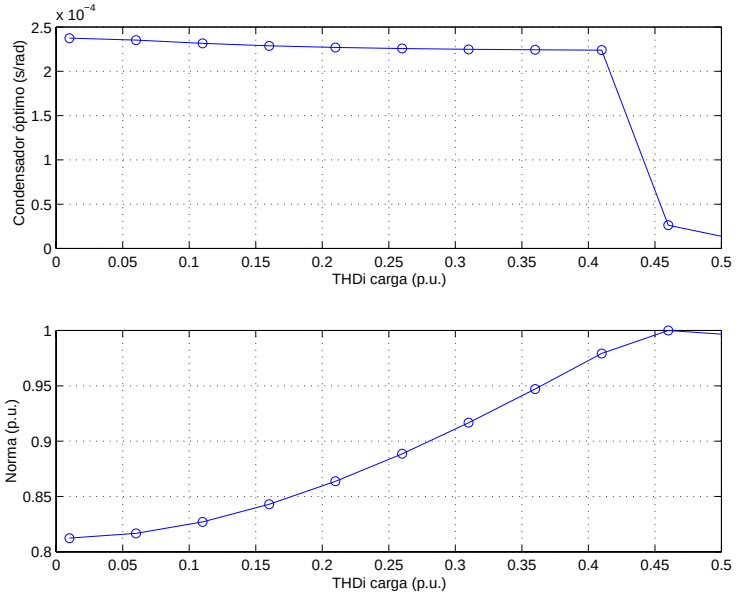


Figura 5.4: Compensación con condensador. Capacidad del condensador óptimo y valor eficaz de la intensidad relativo al inicial, respecto a la distorsión de carga.

sustancial. Además, puede comprobarse que el valor de la capacidad del condensador sufre una variación brusca a partir de una distorsión de intensidad de la carga igual a 40%. Con distorsiones menores a este valor, el mínimo absoluto se encuentra en una misma región. Al ir aumentando el valor de la distorsión de intensidad de la carga, la curva de valor absoluto de intensidad respecto a la capacidad del condensador se desplaza verticalmente, lo cual se puede apreciar en la Figura 5.4, ya que los valores eficaces de intensidad después de la compensación crecen con la distorsión. De esta forma, a partir de un 40% de distorsión de intensidad de la carga, si bien dentro de la zona analizada sigue existiendo un mínimo local, dicho mínimo no es el absoluto, que en este caso se encuentra en una zona con valores de condensadores menores, o lo que es lo mismo, en una región definida por condensadores que crean resonancias para armónicos de mayor orden a los anteriores.

En la Figura 5.5 se representan las distorsiones de tensión e intensidad. En cada figura se representan dos curvas: valores absolutos de distorsión antes de compensar, en porcentaje, y valores relativos frente a esta última después de la compensación. Los primeros aumentan con la distorsión de la carga, mientras que los segundos permanecen prácticamente constantes con algunas excepciones. Tal es el caso del primer punto de la curva de distorsión relativa de

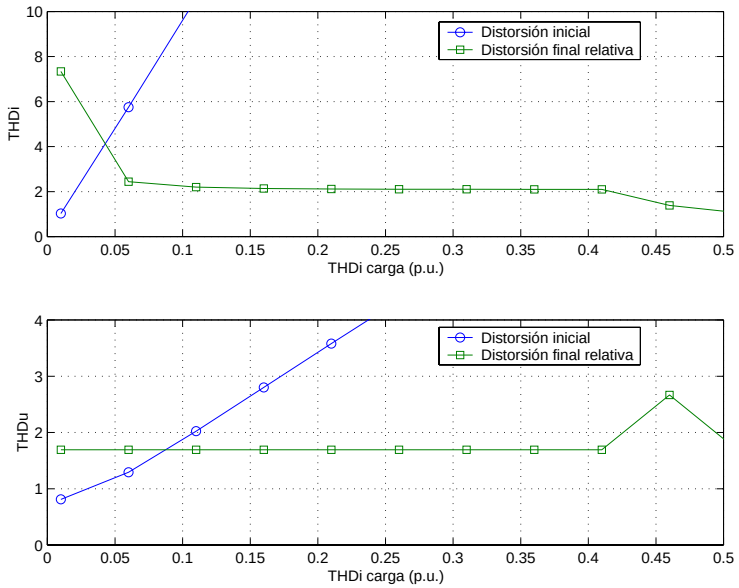


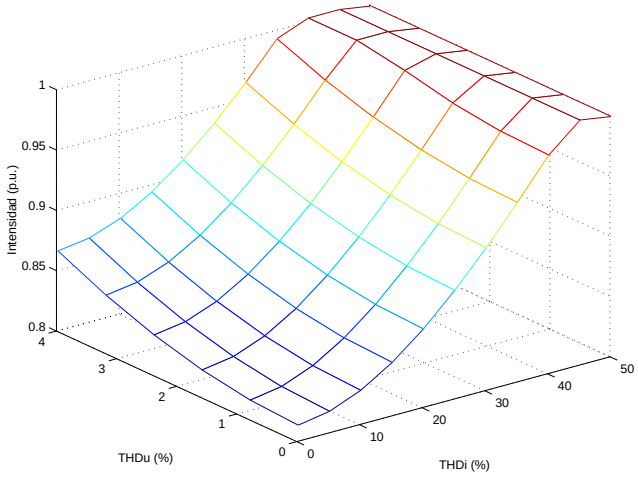
Figura 5.5: Compensación con condensador. Distorsión de tensión e intensidad antes de la compensación y relativas después de la misma.

intensidad, bastante mayor que los demás. Esto se debe a que para dicho punto son predominantes los armónicos generados por la tensión de la fuente respecto a los producidos por la carga no lineal, por lo que al instalar el condensador se produce un aumento de los armónicos introducidos por la fuente circulando por la línea. La disminución de la distorsión relativa al final de la curva se debe al pequeño valor de la capacidad del condensador instalado.

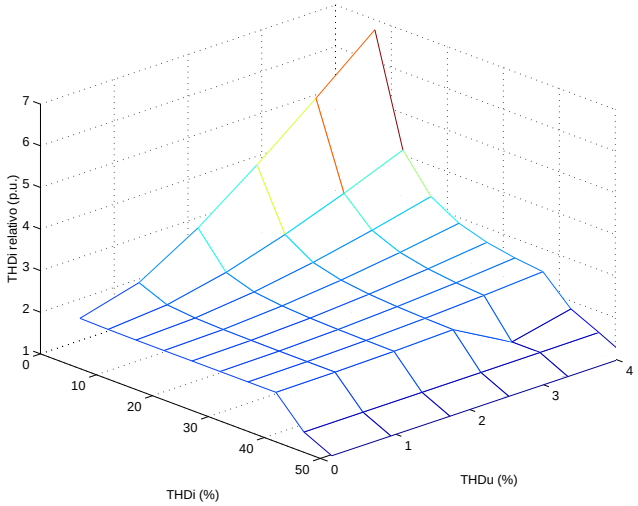
5.3.2 Distorsión de tensión

Al igual que ocurre en el caso de la distorsión de intensidad, un aumento de la distorsión de tensión provoca un filtrado menos efectivo. Por una parte, las reducciones de potencia reactiva no son factibles en algunos casos, debido a que la compensación conseguida para el armónico fundamental y armónicos de orden inferior son empeoradas por la circulación de armónicos de orden superior hacia el condensador. Esto, por otra parte, supone un deterioro importante tanto de las distorsiones de intensidad y de la tensión en la carga. A modo de resumen, e incluyendo los efectos de distorsiones en tensión del sistema e intensidad de la carga, se presenta la Figura 5.6.(a), en la que se muestra una representación del valor eficaz de la intensidad después de la compensación

relativa a la existente previamente. Asimismo, la Figura 5.6.(b) representa la distorsión de intensidad relativa.



(a)



(b)

Figura 5.6: Compensación con condensador. (a) Intensidad después de compensar respecto a distorsión de tensión e intensidad. (b) Distorsión de intensidad después de compensar frente a distorsión de tensión e intensidad.

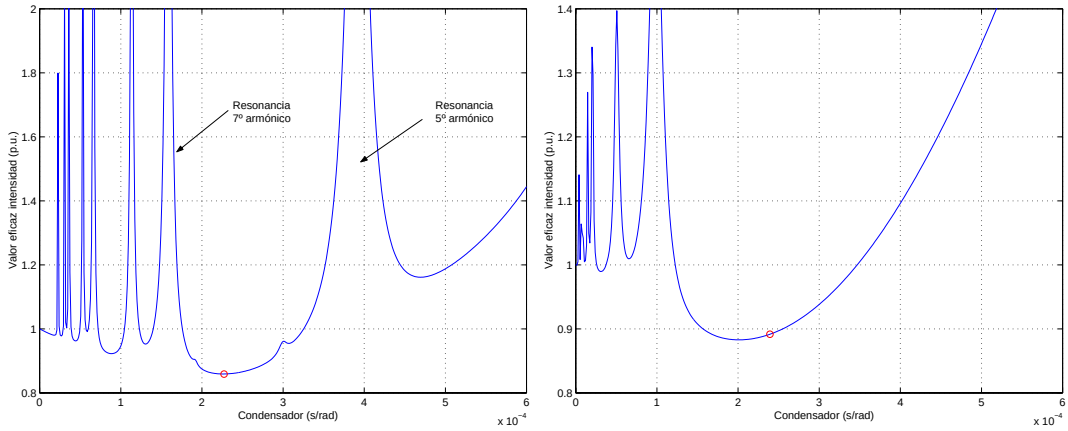


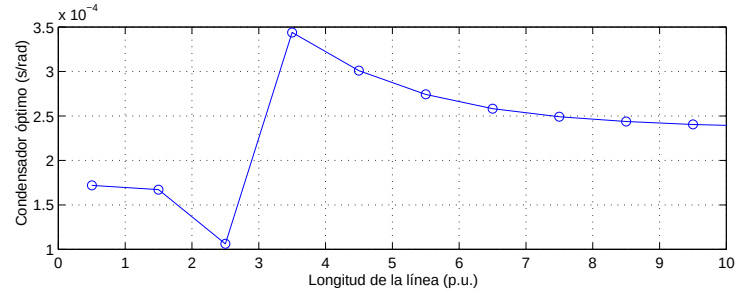
Figura 5.7: Compensación con condensador. Comparación de las curvas de valor eficaz de intensidad frente a la capacidad del condensador para longitudes de línea de: (a) 1 (p.u.). (b) 10 (p.u.).

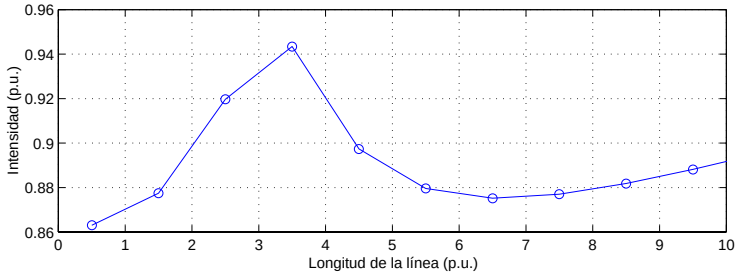
5.3.3 Longitud de la línea

La impedancia del sistema juega un importante papel a la hora de minimizar la potencia reactiva en condiciones no senoidales, debido a que la variación de la misma supone una modificación de la situación de las resonancias del sistema. A tal efecto, en la Figura 5.7 se compara el valor eficaz de la intensidad frente al valor del condensador en el problema original y en otro en el que la longitud de la línea es 10 veces superior. Las resonancias para este nuevo caso se han desplazado hacia valores de capacidad de condensadores inferiores. Es de interés resaltar el valor óptimo de la capacidad del condensador calculado que, como puede comprobarse en la Figura 5.7, no coincide con el mínimo de la curva de valor eficaz de intensidad. La razón de este desplazamiento se debe a que la función que se está minimizando es la intensidad reactiva respecto a la tensión de la carga, mientras que el mínimo de la curva corresponde a la potencia reactiva mínima respecto a la tensión del sistema. Dado que en este caso la impedancia de línea presenta un alto valor, existe una mayor diferencia entre la tensión de la fuente y la de la carga, lo cual se refleja en la diferencia entre el óptimo alcanzado y el mínimo de la curva.

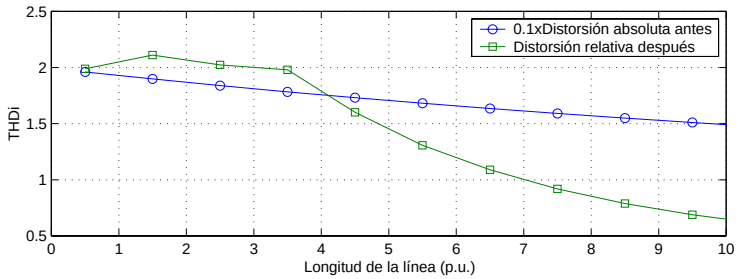
En la Figura 5.8.(a) se representa la evolución de la capacidad del condensador óptimo y del valor eficaz frente a la longitud de la línea de alimentación expresada en por unidad, siendo la base su longitud original.

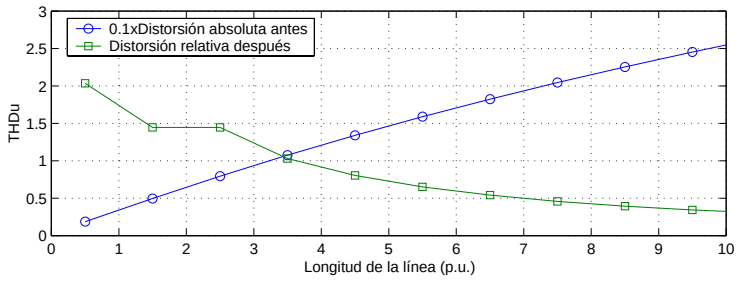
En la Figura 5.8.(b) se representa la variación de la distorsión de intensidad y tensión absolutas antes de la compensación y relativas después de la misma





(a)





(b)

Figura 5.8: Compensación con condensador. (a) Capacidad del condensador óptimo y valor eficaz de la intensidad relativo respecto a la longitud de la línea en por unidad. (b) Distorsión de intensidad y tensión antes y después de la compensación respecto a la longitud de la línea en por unidad.

respecto a la longitud de la línea. Como puede comprobarse, conforme la longitud aumenta, la distorsión absoluta de intensidad antes de compensar disminuye mientras que la de tensión crece, ya que la impedancia de la línea es mayor. En cuanto a las distorsiones relativas después de la compensación, se puede comprobar que disminuyen con el aumento de la longitud de la línea, llegando incluso a hacerse menores que la unidad, debido a la drástica reducción de los armónicos de frecuencias altas después de la compensación, por el elevado valor de impedancia que ahora se ve desde la fuente.

5.4 Compensación mediante filtro sintonizado

La compensación de potencia reactiva mediante filtro sintonizado mejora las características de compensación respecto al condensador, debido a que el filtro para frecuencias superiores a las de sintonización se comporta como una carga inductiva. Sin embargo, para frecuencias inferiores trabaja como una carga capacitiva, por lo que presenta los mismos problemas de resonancia que el condensador. Una solución para evitar este problema es sintonizar el filtro en el armónico característico de menor orden, limitándose las resonancias para valores de armónicos que son relativamente poco importantes.

La evolución de la intensidad respecto al condensador de un filtro pasivo sintonizado en el quinto armónico para el problema previamente definido, se muestra en la Figura 5.9. En dicha figura se puede observar la resonancia que produce el cuarto armónico, la cual no es muy problemática debido a la poca amplitud que éste representa. La comparación de los espectros armónicos de tensión e intensidad antes y después de la compensación se muestran en la Figura 5.10.

Los resultados de la compensación, que se resumen en la Tabla 5.5, son superiores a los obtenidos con la compensación con condensador: no sólo se reduce más el valor eficaz de la intensidad, sino que también lo hacen la distorsión de intensidad y tensión, lo cual se debe a los siguientes motivos:

- Por una parte se está eliminando el quinto armónico generado por la carga no lineal, pues el filtro opone impedancia nula a su paso. Esto supone una reducción del valor eficaz y de la distorsión de intensidad que circula por la línea. Sin embargo, puede observarse en la Figura 5.10 que sigue existiendo una cierta cantidad de este armónico, debido a la distorsión de la tensión de red. Especial atención debe ser prestada en caso de tener tensiones distorsionadas cuando se instalan filtros pasivos, pues si la tensión de la red es elevada para el armónico al cual se sintoniza

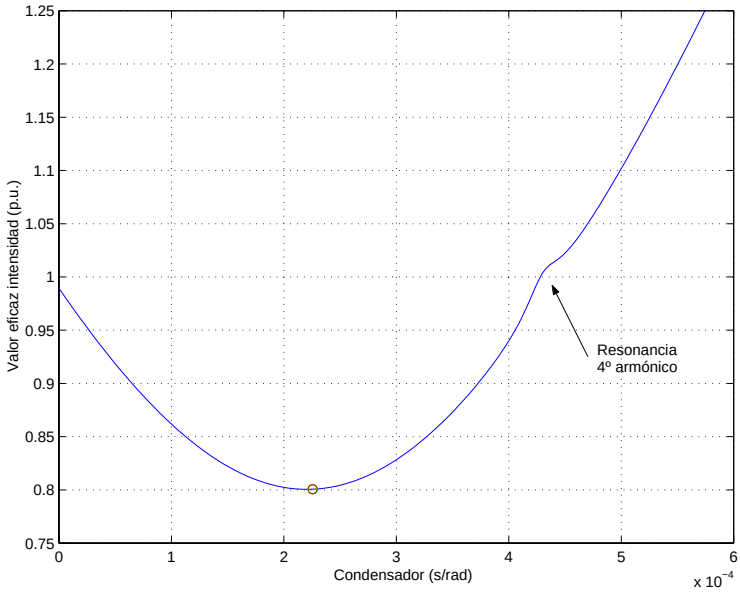


Figura 5.9: Compensación con filtro sintonizado. Valor eficaz de la intensidad frente a la capacidad del condensador.

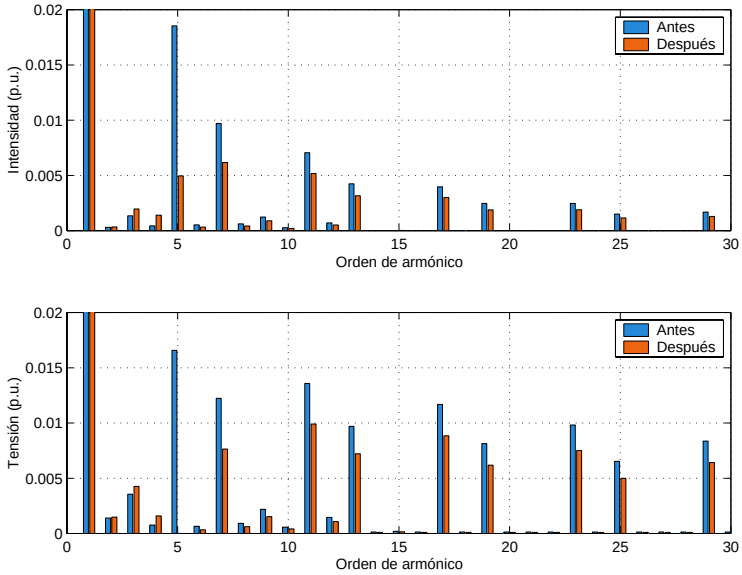


Figura 5.10: Filtro sintonizado. Espectro armónico de intensidad y tensión antes y después de la compensación.

Tabla 5.5: Compensación con filtro sintonizado. Resumen de resultados del proceso de optimización.

Datos iniciales	
Distorsión de tensión (%)	0.8
Distorsión de intensidad (%)	20
Factor de potencia	0.8

Parámetros del filtro	
Frecuencia de sintonización	Condensador (s/rad)
5	$2.255 \cdot 10^{-4}$

Resultados obtenidos			
Magnitud	Intensidad (p.u.)	THDi (%)	THDu (%)
Antes	1	19.28	3.42
Después	0.8	11.47	2.18

el filtro, puede que la mejora esperada en la eliminación del armónico de la carga sea empeorada por el aumento de la intensidad armónica proveniente de la red.

- La instalación del filtro limita también la circulación de armónicos de intensidad de órdenes superiores a la frecuencia de sintonización desde el sistema, lo cual disminuye el valor eficaz de intensidad y la distorsión tanto de tensión como de intensidad.

A continuación se analizarán cada uno de los factores que pueden intervenir en el modo de funcionamiento de los filtros sintonizados.

5.4.1 Distorsión de tensión e intensidad

En las figuras 5.11 a 5.13 se muestran el valor eficaz de intensidad, la capacidad del condensador óptimo y la distorsión de intensidad al instalar un filtro para el quinto armónico, cuando se varía la distorsión de tensión de la red e intensidad de la carga.

En la Figura 5.11 se puede apreciar que si se mantiene la distorsión de tensión constante, el valor eficaz de intensidad disminuye conforme la distorsión de intensidad aumenta. Este efecto, que en un principio puede parecer contradictorio si se compara con el caso de compensación mediante condensador, es lógico debido a que cuanto mayor es la distorsión de intensidad, mayor será

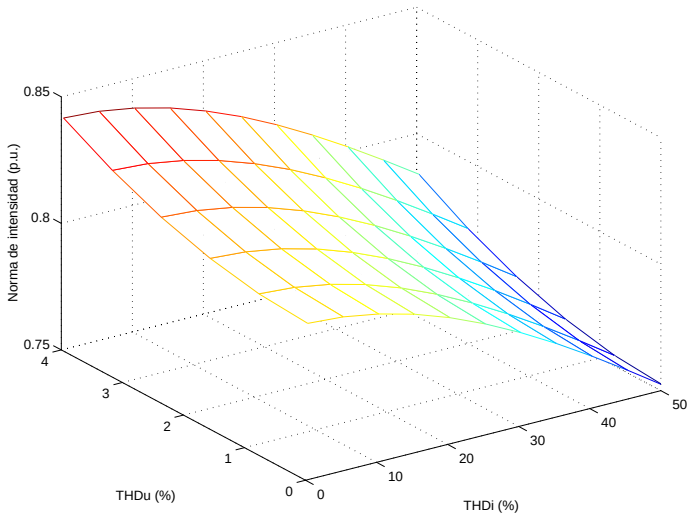


Figura 5.11: Compensación con filtro sintonizado. Valor eficaz de intensidad frente a distorsión de tensión e intensidad.

el contenido de quinto armónico que se elimina al instalar el filtro. Por otra parte, para una distorsión de intensidad constante, la compensación de potencia reactiva empeora cuando aumenta la distorsión de tensión, pues crecen los armónicos que circulan por la red debido a dicha tensión. Por tanto, se obtendrán mejores características relativas de compensación cuando la distorsión de tensión sea reducida y la de intensidad elevada.

El valor de la capacidad del condensador óptimo frente a las distorsiones de tensión e intensidad, mostrado en la Figura 5.12, tiene un claro comportamiento. Si se mantiene constante la distorsión de tensión, el valor de la capacidad del condensador disminuye conforme la distorsión de intensidad aumenta, debido a que cuanto mayor sea el armónico que se está filtrando, menor será la capacidad del condensador necesario para conseguir una mejor reducción de intensidad reactiva. Igual comportamiento se tiene cuando se deja constante la distorsión de intensidad y aumenta la de tensión, pero debido a diferente causa: con el aumento de la distorsión de tensión, si se aumenta mucho el valor de la capacidad del condensador, se empeora la compensación por la circulación de armónicos de orden elevado hacia la carga.

La distorsión de intensidad, mostrada en la Figura 5.13, para el caso considerado es más sensible a las variaciones de distorsión de la tensión de alimentación que a las de la intensidad de la carga no lineal. Si se mantiene constante la distorsión de tensión se observa cómo la distorsión de intensidad disminuye

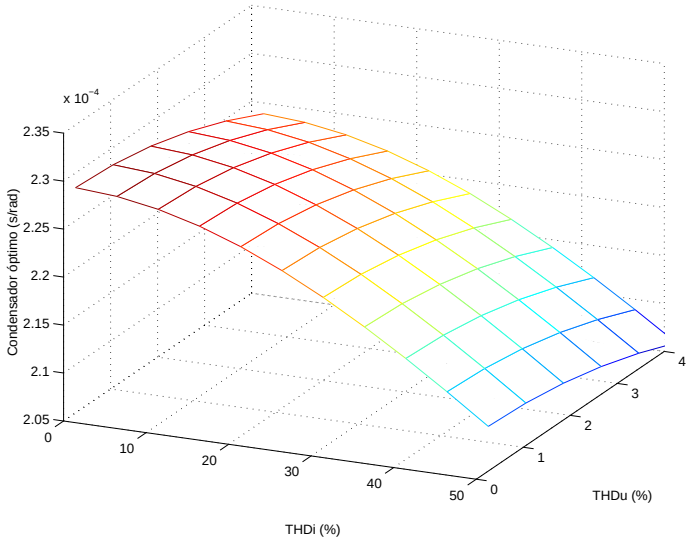


Figura 5.12: Compensación con filtro sintonizado. Capacidad del condensador óptimo frente a distorsión de tensión e intensidad.

conforme aumenta la distorsión de intensidad, por la misma razón explicada para el caso del valor eficaz de la intensidad.

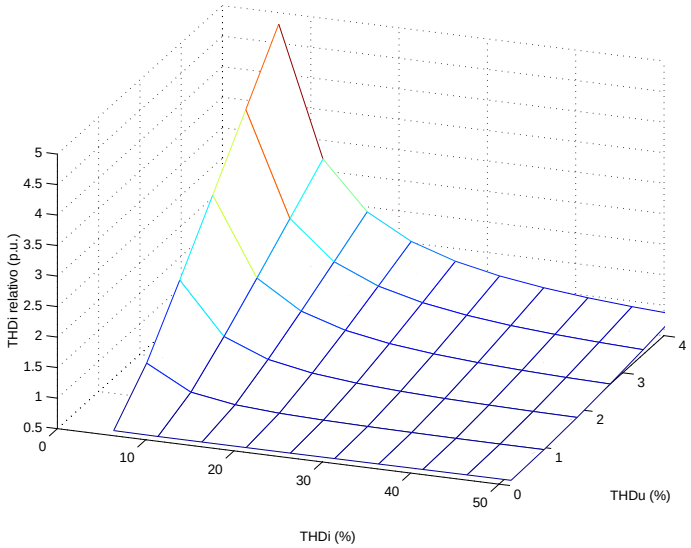


Figura 5.13: Compensación con filtro sintonizado. Distorsión de intensidad frente a distorsión de tensión e intensidad.

5.4.2 Variación de la frecuencia de sintonización

Los resultados obtenidos cuando se varía la frecuencia de sintonización de los filtros se recogen en las figuras 5.14 y 5.15. Si se analiza el valor eficaz de la intensidad, se puede comprobar cómo el mejor resultado se establece para el filtro sintonizado al quinto armónico, debido a que el efecto predominante en este caso es la distorsión de intensidad de la carga no lineal. Si por el contrario, la distorsión de tensión fuera pronunciada, los mejores resultados se lograrían para filtros con frecuencias de sintonización pequeñas, alrededor del tercer armónico, conocidos técnicamente como filtros anti-armónicos.

5.5 Compensación mediante banco de filtros sintonizados

Tras los resultados obtenidos en la sección anterior con un filtro sintonizado, parece lógico establecer que para la mayoría de las aplicaciones, los filtros se sintonicen comenzando por el armónico de mayor importancia que tenga la menor de las frecuencias, para luego ir añadiendo otros filtros sintonizados a armónicos de orden superior. Normalmente los filtros que se añaden son los

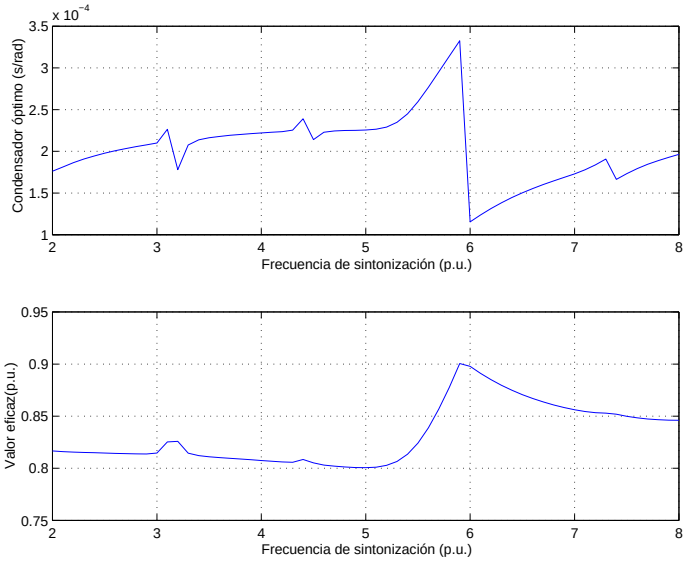


Figura 5.14: Compensación con filtro sintonizado. Valor eficaz de intensidad y capacidad del condensador óptimo frente a frecuencia de sintonización.

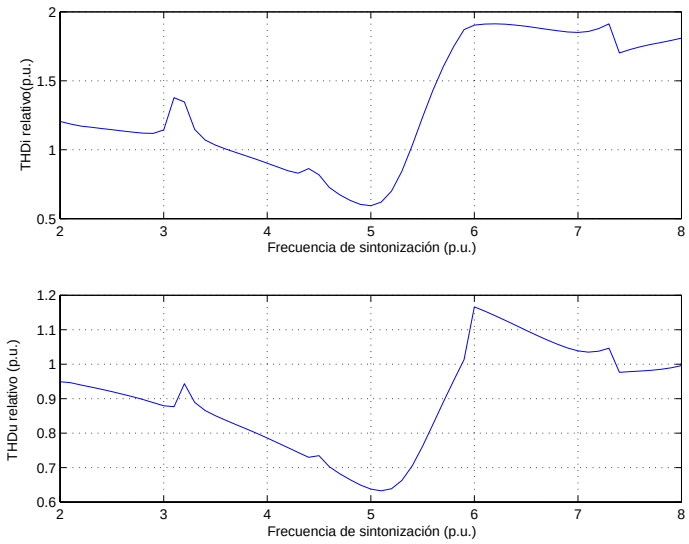


Figura 5.15: Compensación con filtro sintonizado. Distorsión de tensión e intensidad frente a frecuencia de sintonización.

sintonizados al quinto, séptimo, decimoprimer y decimotercer armónicos, no siendo habitual la instalación de filtros de orden superior.

Si a la instalación industrial que se ha definido anteriormente se le añaden bancos de filtros sintonizados en los armónicos indicados, se tienen los resultados que se muestran en las tablas 5.6 a 5.8. Como se puede observar, no se consigue una mejora sustancial en cuanto a reducción de potencia reactiva, si bien se consigue una disminución de las distorsiones de tensión e intensidad.

Es interesante volver a analizar el caso de compensación con dos filtros sintonizados, ya que, al ser bidimensional, pueden ser representadas gráficamente las superficies de valor eficaz de intensidad frente a las capacidades de los condensadores de dichos filtros. El interés de esta representación es poder observar las resonancias que hacen que la función que se quiere optimizar sea fuertemente no lineal. En la Figura 5.16 se tiene dicha superficie cuando la distorsión de tensión es del 4% y la de intensidad es del 50% al instalarse unos filtros sintonizados al quinto y séptimo armónico. En dicha figura puede verse la resonancia existente en el cuarto armónico. Si se representan las curvas de nivel de la superficie anterior, Figura 5.17, puede observarse el óptimo alcanzado y la resonancia mencionada anteriormente. También, aunque un poco menos visible, se encuentra la resonancia para el armónico sexto, reflejada en la ligera curvatura de las curvas de nivel en la parte inferior cercana al mínimo.

Tabla 5.6: Compensación con banco de dos filtros sintonizados. Resumen de resultados del proceso de optimización.

Datos iniciales	
Distorsión de tensión (%)	0.8
Distorsión de intensidad (%)	20
Factor de potencia	0.8

Parámetros del filtro	
Frecuencia de sintonización	Condensador (s/rad)
5	$8.9476 \cdot 10^{-5}$
7	$1.3832 \cdot 10^{-4}$

Resultados obtenidos			
Magnitud	Intensidad (p.u.)	THDi (%)	THDu (%)
Antes	1	19.28	3.42
Después	0.798	8.97	1.73

Tabla 5.7: Compensación con banco de tres filtros sintonizados. Resumen de resultados del proceso de optimización.

Datos iniciales	
Distorsión de tensión (%)	0.8
Distorsión de intensidad (%)	20
Factor de potencia	0.8

Parámetros del filtro	
Frecuencia de sintonización	Condensador (s/rad)
5	$3.323 \cdot 10^{-5}$
7	$4.0562 \cdot 10^{-5}$
11	$1.5682 \cdot 10^{-4}$

Resultados obtenidos			
Magnitud	Intensidad (p.u.)	THDi (%)	THDu (%)
Antes	1	19.28	3.42
Después	0.797	7.40	1.02

La Figura 5.18 representa las rectas de resonancia y los mínimos locales existentes en cada una de las regiones. Parte de estos mínimos coinciden

Tabla 5.8: Compensación con banco de cuatro filtros sintonizados. Resumen de resultados del proceso de optimización.

Datos iniciales	
Distorsión de tensión (%)	0.8
Distorsión de intensidad (%)	20
Factor de potencia	0.8

Parámetros del filtro	
Frecuencia de sintonización	Condensador (s/rad)
5	$5.8459 \cdot 10^{-5}$
7	$6.8873 \cdot 10^{-5}$
11	$2.7578 \cdot 10^{-4}$
13	$7.4635 \cdot 10^{-4}$

Resultados obtenidos			
Magnitud	Intensidad (p.u.)	THDi (%)	THDu (%)
Antes	1	19.28	3.42
Después	0.797	7.19	0.99

con estas rectas. La razón para que estas situaciones se produzcan es clara: la función objetivo original tiende a disminuir en una dirección que cruza la barrera. La modificación de la misma mediante los términos de penalización impide que esta situación ocurra. Realmente la función modificada tiene un mínimo local, ya que, aunque el valor del factor de penalización μ es muy pequeño al final del proceso iterativo, distorsiona suficientemente la función original cerca de la barrera creando un mínimo local cerca de ella, de forma que es imposible cruzar la misma.

La influencia de la distorsión de tensión e intensidad se manifiesta en la Figura 5.19 para el banco de dos filtros y en la Figura 5.20 para el de tres filtros. El comportamiento es similar al caso analizado para un único filtro sintonizado al quinto armónico.

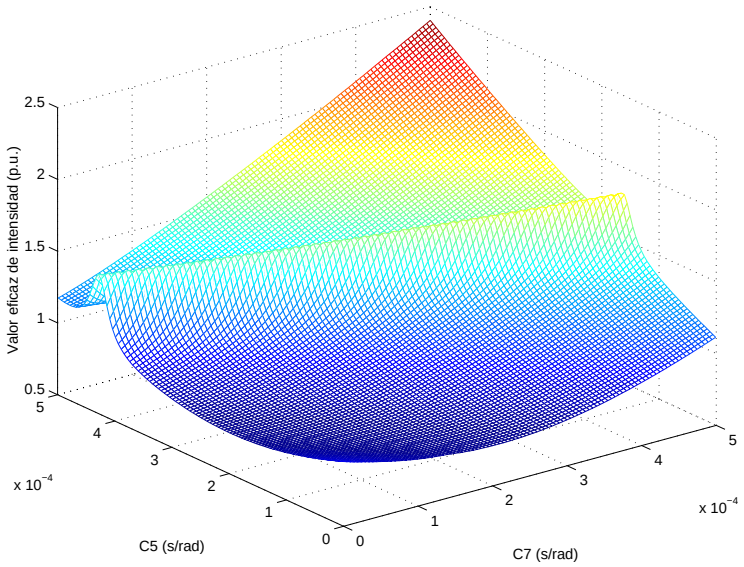


Figura 5.16: Compensación con banco de dos filtros sintonizados. Valor eficaz de intensidad frente a capacidad de condensadores.

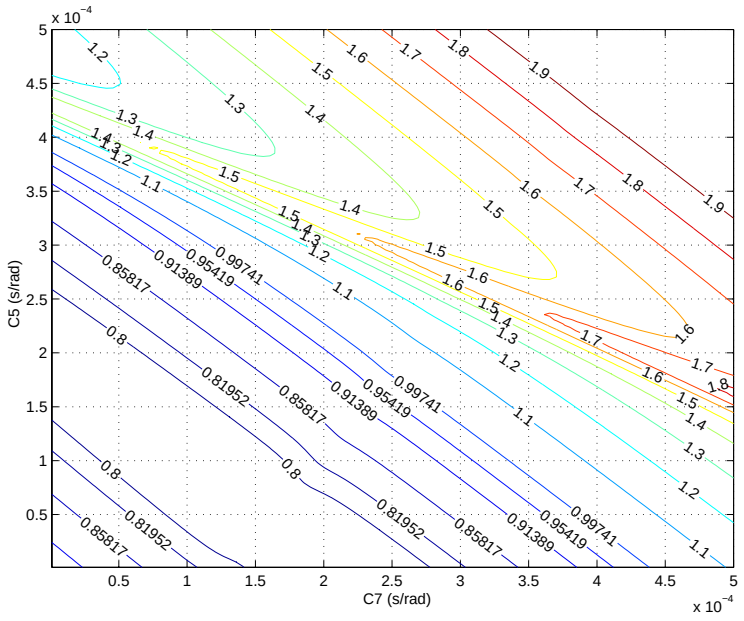


Figura 5.17: Compensación con banco de dos filtros sintonizados. Curvas de nivel del valor eficaz de intensidad.

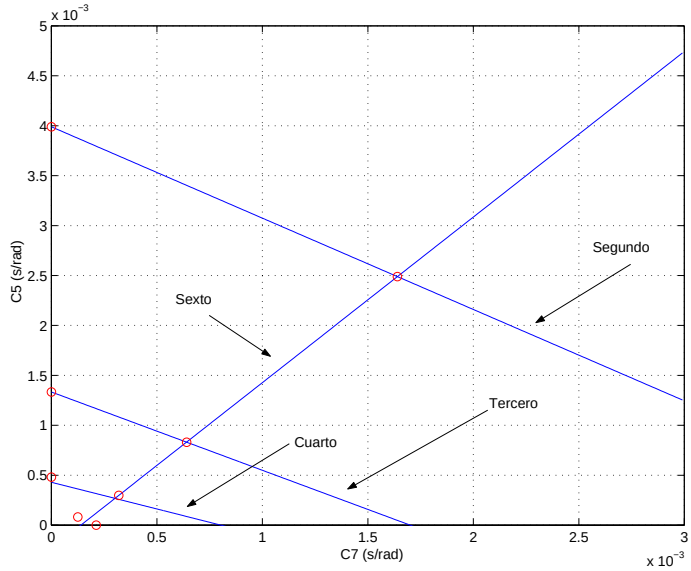


Figura 5.18: Compensación con banco de dos filtros sintonizados. Rectas de resonancia y localización de mínimos locales.

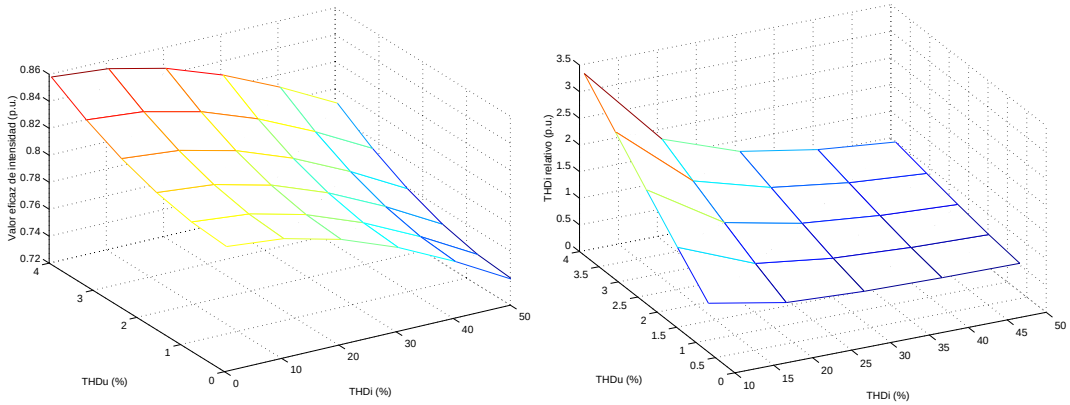


Figura 5.19: Compensación con banco de dos filtros sintonizados: 5 y 7. (a) Valor eficaz de intensidad frente distorsión de intensidad y tensión. (b) Distorsión de intensidad frente a distorsión de tensión e intensidad.

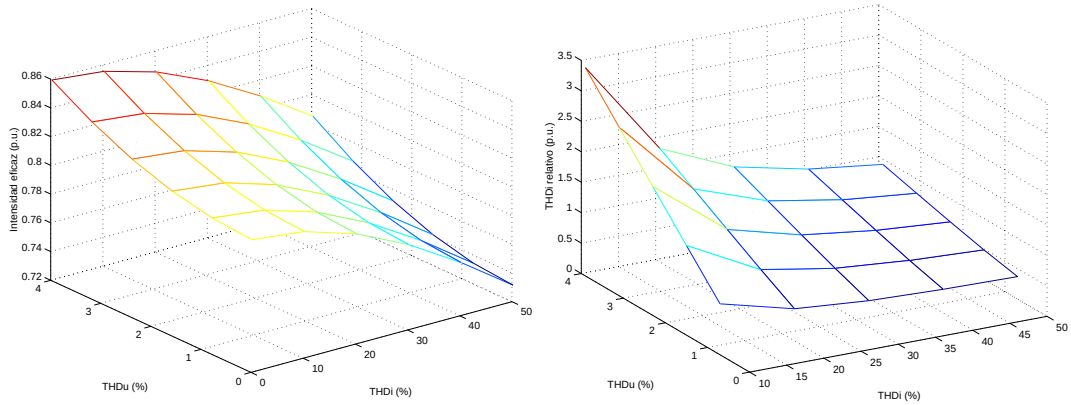


Figura 5.20: Compensación con banco de tres filtros sintonizados: 5, 7 y 11. (a) Valor eficaz de intensidad frente distorsión de intensidad y tensión. (b) Distorsión de intensidad frente a distorsión de tensión e intensidad.

5.6 Aspectos numéricos del algoritmo

En este apartado se analizarán los aspectos numéricos más relevantes del algoritmo de punto interior desarrollado para optimizar los componentes de los filtros pasivos sintonizados.

5.6.1 Zonas factibles

Las zonas factibles son las regiones delimitadas por las rectas de resonancia dentro de las cuales deben ser buscados los mínimos locales. El número de estas zonas es función no sólo de los armónicos existentes en el sistema, sino del número de filtros pasivos que se instalan y de los armónicos a los cuales están sintonizados dichos filtros. El número de zonas a estudiar aumenta considerablemente con el número de filtros instalados. Este resultado es lógico, pues no debe olvidarse que las zonas factibles están contenidas en el conjunto formado por 2^m elementos, siendo m los armónicos que tienen valores o bien inferiores a las frecuencias de sintonización de los filtros, o entre las mismas. Para el ejemplo propuesto, en la Tabla 5.9 se detallan el número de regiones que el algoritmo de detección de zonas factibles tiene que analizar y el número de zonas factibles en las que se tiene que calcular el mínimo local, en función del número de filtros a instalar, siendo las frecuencias de sintonización las correspondientes a los órdenes 5, 7, 11 y 13.

Tabla 5.9: Zonas factibles a estudiar en función del número de filtros.

Número de filtros	1	2	3	4
Zonas a analizar (2^m)	8	16	64	128
Zonas Factibles	4	8	39	78

5.6.2 Número de iteraciones

El número de iteraciones en las que se consigue la convergencia del método depende de la región que se somete a estudio y de las tasas de distorsión de tensión e intensidad, pues estas confieren una mayor no linealidad al problema. En las tablas 5.10 y 5.11 se expresan el número de iteraciones medio, mínimo y máximo en función del número de filtros introducidos con un límite de convergencia de 10^{-9} en el error medio de dualidad.

Tabla 5.10: Número de iteraciones en función de los filtros instalados para distorsiones pequeñas: distorsión de tensión 0.8% e intensidad 20%.

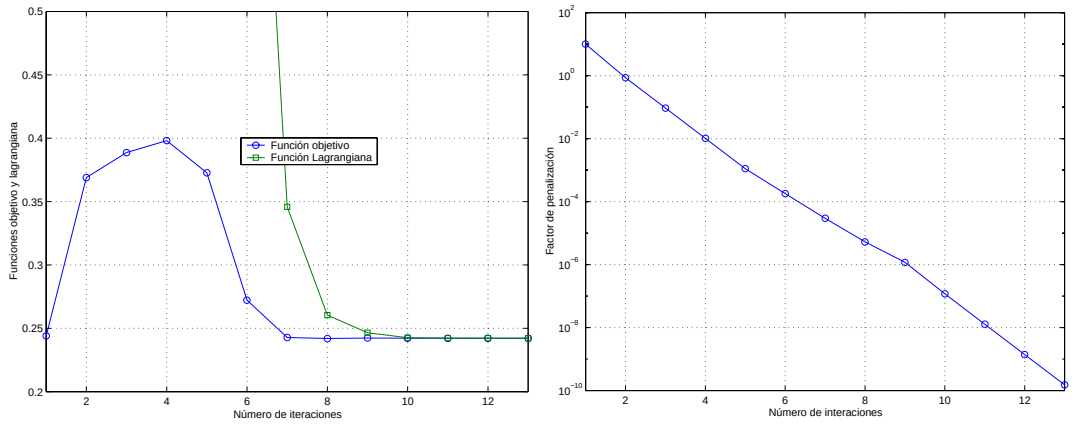
Número filtros	Número de iteraciones		
	Mínimo	Medio	Máximo
2	13	14.25	18
3	13	15.72	22
4	13	16.67	27

Tabla 5.11: Número de iteraciones en función de los filtros instalados para distorsiones altas: distorsión de tensión 4% e intensidad 50%.

Número filtros	Número de iteraciones		
	Mínimo	Medio	Máximo
2	13	14.50	18
3	13	15.56	28
4	13	17.34	31

5.6.3 Función lagrangiana, error medio de dualidad y factor de penalización

El método de minimización utilizado consiste en modificar la función objetivo añadiendo unos términos de barrera para que la búsqueda del mínimo se restrinja a la zona factible que se está analizando. En el inicio del proceso iterativo, el peso que estos términos de barrera tienen sobre la función objetivo es muy grande, existiendo una gran diferencia entre la función lagrangiana y la función original. Conforme el número de iteraciones aumenta, la función lagrangiana debe ir disminuyendo su valor, acercándose al mínimo de la función objetivo original. Asimismo, el error medio de dualidad y el factor de penalización μ deben disminuir, dado que éste se calcula a partir de aquel. El comportamiento de estos parámetros respecto al número de iteraciones se muestra en la Figura 5.21, con distorsión de tensión del 4% y 50% de intensidad y dos filtros sintonizados al 5^o y 7^o armónicos.



(a) (b)

Figura 5.21: (a) Funciones objetivo y Lagrangiana frente a número de iteraciones. (b) Factor de penalización frente a número de iteraciones.

Como puede verse, la función original que se minimiza incluso llega a aumentar su valor en las primeras iteraciones, debido a la gran distorsión que están generando las barreras logarítmicas, cuyo cometido es, en estas etapas del proceso iterativo, dirigir a la solución hacia al interior de la región factible.

5.6.4 Evolución de la función objetivo con el número de iteraciones

El análisis de la compensación mediante dos filtros sintonizados tiene la ventaja de poder representar la superficie de la función que se está minimizando frente al valor de las capacidades de los condensadores. Si se representa dicha superficie a lo largo de varias etapas del proceso de optimización se pueden apreciar los cambios de la misma debido a la modificación del factor de penalización. En la Figura 5.22 pueden verse las curvas de nivel de dicha superficie para el mismo ejemplo expuesto anteriormente. En ellas se puede ver claramente cómo la restricción correspondiente a la resonancia del sexto armónico va disminuyendo su amplitud conforme el número de iteraciones aumenta. Al final del proceso iterativo esta resonancia, que no es demasiado importante debido al escaso valor que este armónico posee, adquiere su forma original. Sin embargo, a pesar de su escaso valor, la resonancia tiene importantes efectos cualitativos, pues como se puede comprobar en la Figura 5.22.(d), existen dos cuencas bien definidas a la izquierda y derecha de la misma. Con un método de minimización convencional que no utilice las restricciones propuestas, alcanzar un mínimo u otro depende de la solución inicial adoptada.

Por otra parte, también es interesante comparar las distintas direcciones del gradiente en cada paso del proceso iterativo en comparación con el mínimo de la región que se muestra en la Figura 5.22.(d). Cuando el factor de penalización es alto, figuras 5.22.(a) y 5.22.(b), la barrera logarítmica situada en la resonancia del sexto armónico es la parte predominante de la función lagrangiana, por lo que el gradiente tiende hacia puntos que se alejan de dicha restricción. Conforme el factor de penalización decrece, figuras 5.22.(c) y 5.22.(d), la función lagrangiana se parece más a la función original lejos de la barrera impuesta, por lo que el gradiente tiende hacia el mínimo de dicha función.

5.7 Resumen del capítulo

En este capítulo se ha aplicado el algoritmo de optimización de filtros pasivos, desarrollado en el Capítulo 4, a una red de distribución concreta. Los parámetros que influyen en el diseño de los filtros son múltiples: distorsión de tensión de la red de distribución, impedancia hasta el punto en el que se instalan los filtros pasivos, distorsión de intensidad de la carga a compensar, etc. En este sentido, el objetivo que se ha perseguido es estudiar la compensación realizada en función de los mismos. La compensación se ha caracterizado en función de

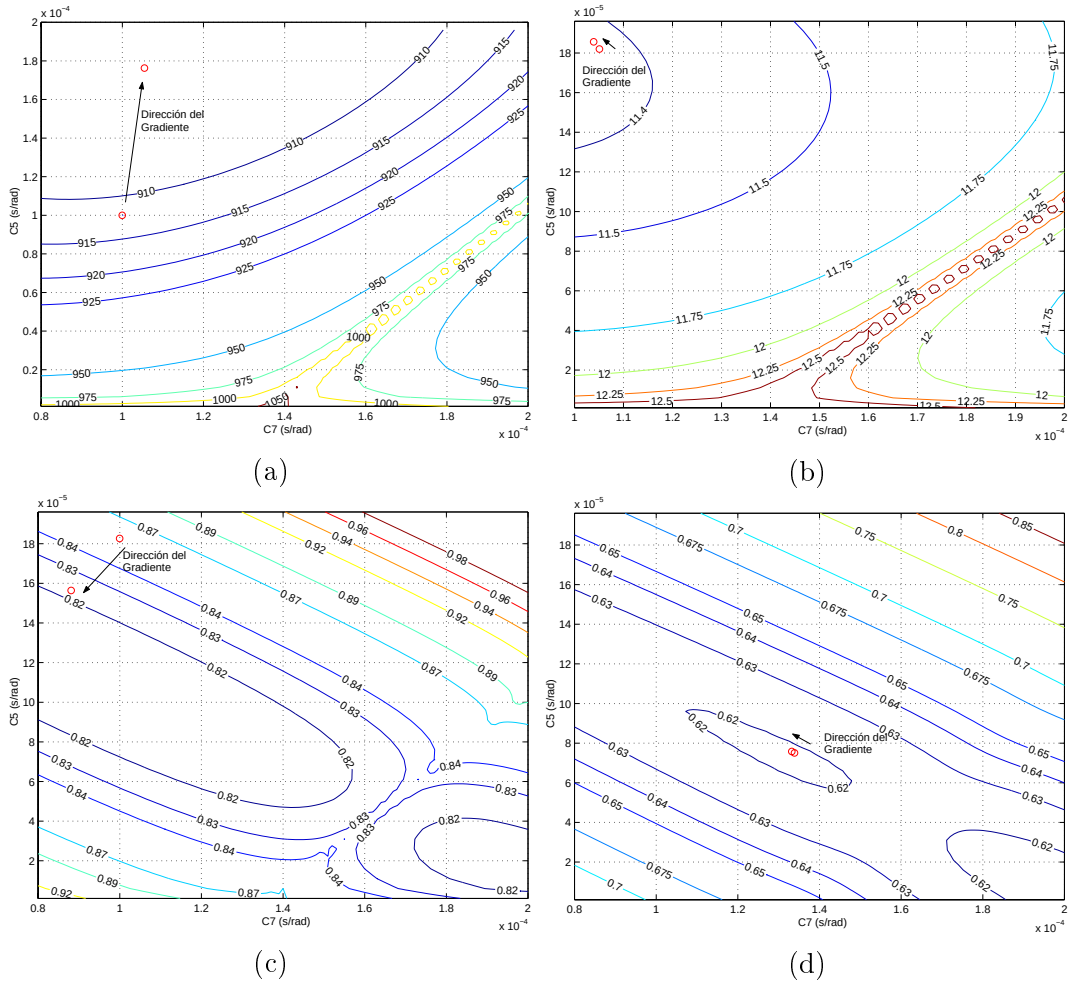


Figura 5.22: Curvas de nivel de la función lagrangiana. (a) Iteración 1. (b) Iteración 3. (c) Iteración 5. (d) Iteración 10

cuatro magnitudes: capacidades de los condensadores de los filtros a instalar, valor eficaz de la intensidad del sistema, distorsión de intensidad y distorsión de tensión, todos ellos después de la compensación.

Por otra parte, también se ha realizado un análisis de los aspectos numéricos del algoritmo de punto interior utilizado para optimizar los filtros pasivos. Concretamente, se analizan las zonas factibles a estudiar, el número de iteraciones en las que se alcanza el óptimo, la evolución de la función lagrangiana y la evolución de la función objetivo en el caso bidimensional, lo cual da una visión muy clara de la modificación sufrida por la adición de las barreras.

Una vez estudiado de forma exhaustiva el comportamiento que el algoritmo

presenta en un caso particular, se propone realizar la validación experimental del procedimiento teórico descrito, lo cual se desarrollará en el siguiente capítulo.

Capítulo 6

Validación experimental

6.1 Introducción

En este capítulo se pretende corroborar de forma experimental el método de diseño de filtros pasivos desarrollado. Para ello se ha montado en el laboratorio una red de distribución a escala similar a la utilizada en el Capítulo 5 para ilustrar la influencia los diferentes parámetros que intervienen en el proceso de optimización. Las líneas y transformadores se reproducen mediante el uso de impedancias, al igual que la parte lineal de la carga, mientras que la carga no lineal es un accionamiento de velocidad variable.

Para proceder a la medida de tensiones e intensidades de la red, se desarrolla un instrumento virtual basado en una tarjeta de adquisición de datos y en el software comercial LabView. Dicha tarjeta recibe las señales provenientes de los sensores de tensión e intensidad que se distribuyen por de la red de distribución construida.

Antes de acometer el diseño del filtro pasivo mediante las consideraciones expuestas en el Capítulo 4, se procede a realizar la compensación de potencia reactiva con condensadores, y así evaluar una primera comparación entre los resultados teóricos y experimentales. En esta comparación se comprueba que la intensidad que la carga no lineal demanda de la red dependen fuertemente de la tensión existente en sus bornas. De esta forma, si bien en el proceso de optimización se sigue manteniendo esta intensidad constante, para poder establecer una comparación más precisa entre los resultados teóricos y experimentales se desarrolla un modelo de la carga no lineal en el Apéndice A.

Por último, se procede al diseño e instalación del filtro pasivo para compensar la potencia reactiva de la instalación y mitigar los armónicos relevantes del sistema.

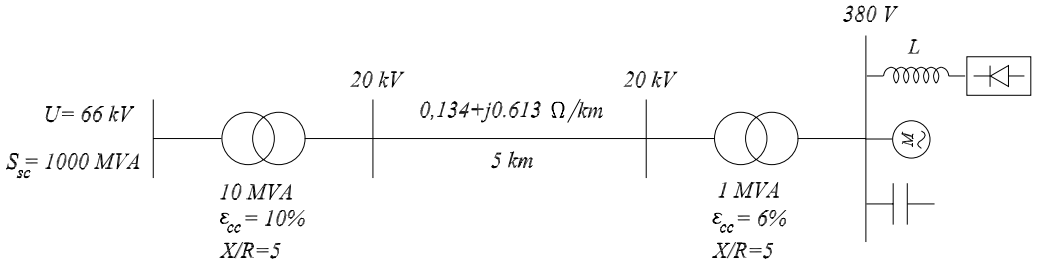


Figura 6.1: Sistema de distribución estudiado.

6.2 Red de distribución estudiada

El esquema unifilar de la red de distribución estudiada corresponde a una típica instalación industrial, alimentada mediante un transformador 20kV/0.38kV de 1 MVA de potencia, tal y como se muestra en la Figura 6.1. El transformador está conectado a una línea aérea que parte de una subestación 66kV/20kV, siendo la potencia de cortocircuito aguas arriba de dicha subestación de 1000 MVA.

La red de distribución que se ha montado a escala en el laboratorio reproduce el esquema unifilar de la Figura 6.1, siendo 380 V y 15 kVA los valores base utilizados para su dimensionado, correspondiendo este último con la potencia nominal del transformador de la instalación industrial. Dicha red está formada por los siguientes componentes:

- Red de alimentación. La tensión de alimentación es provista por la red de baja tensión disponible en el laboratorio. Dicha tensión idealmente debería ser senoidal, pero presenta no sólo desequilibrio para el armónico fundamental, sino que contiene un alto índice de quinto armónico. La distorsión de tensión reflejada en la aparición del quinto armónico se debe al uso de cargas no lineales dentro de la instalación de baja tensión (computadores, iluminación, etc.). Para verificar si la tensión de alimentación se comporta siempre de la misma forma, se realizaron medidas de la misma durante un día completo en intervalos de 5 minutos con medias de 10 ciclos. En este sentido, las medidas realizadas no cumplen con lo establecido en [14], si bien se consigue tener una idea de la evolución de la tensión a lo largo del día, que es en definitiva el objetivo perseguido. En la Figura 6.2 se comprueba como los niveles de quinto armónico cambian bruscamente alrededor de las horas convencionales de inicio y final de la jornada laboral: 8:00, 14:00, 16:00 y 21:00 horas.

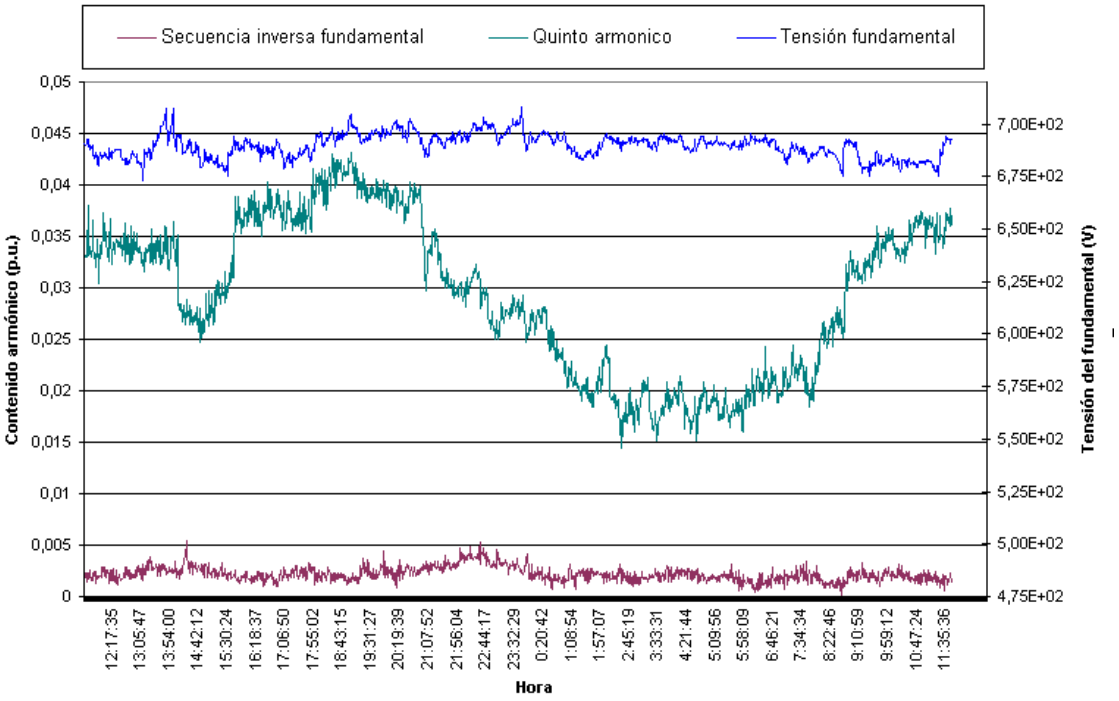


Figura 6.2: Evolución de la secuencia positiva y negativa de la componente fundamental y de la secuencia negativa del quinto armónico de la tensión de la red

Por otra parte, se supone que la tensión de alimentación es rígida, es decir, que se desprecia la impedancia existente hasta este punto de la red de baja tensión. En cualquier caso, dicho valor es pequeño en comparación con los que quedan en serie modelando el comportamiento de las líneas y transformadores, por lo que despreciarlo no supone una pérdida de generalidad en la representación de la red desarrollada. Además, siempre se puede realizar una estimación del valor de dicha impedancia mediante el método expuesto en [61].

- Líneas y transformadores. Estos elementos del esquema unifilar se modelan mediante impedancias, cuyos valores se resumen en la Tabla 6.1. En ella se reflejan los valores de resistencia y reactancia absolutos, en por unidad y en la nueva base.

  A partir de estos valores, se tomaron unos aproximados para que coincidieran lo más posible con los componentes comerciales existentes en el

Tabla 6.1: Valores de impedancias de líneas y transformadores.

	Impedancia					
Elemento	(Ω)		10^{-3}(p.u.)		(mΩ a 380V)	
Red	0	4.356	0	1	0	9.62
Transformador 10 MVA	8.54	42.71	1.95	9.80	18.84	94.4
Línea aérea	0.67	3.065	1.67	7.66	16.12	73.76
Transformador 1 MVA	4.70	23.53	1.17	5.88	113.28	566.39

Tabla 6.2: Valores aproximados de impedancias de líneas y transformadores.

	Resistencia	Inductancia	Intensidad
Elemento	(Ω)	(mH)	(A)
Transformador 10 MVA	0.02	0.3	30
Línea aérea	0.01	0.24	30
Transformador 1 MVA	0.1	1.81	30

mercado. Dichos valores, así como la intensidad de diseño se reflejan en la Tabla 6.2.

Una vez recepcionados los componentes, y como etapa previa al montaje, se procedió a una medida de la impedancia de los mismos a diferentes frecuencias, cuyo resultado está contenido en la Tabla 6.3. Las resistencias toman siempre los valores de diseño para el rango de frecuencias estudiado, mientras que las reactancias presentan varios inconvenientes. El primero de ellos es que el valor de inductancia tiene errores importantes respecto al valor de diseño inicial para la frecuencia fundamental. Además, puede comprobarse cómo al aumentar la frecuencia varían ostensiblemente tanto su resistencia como su inductancia. La explicación a estos dos fenómenos es clara si se adopta un modelo RLC serie de la bobina. Por una parte, al aumentar la frecuencia, las pérdidas en el hierro aumentan, por lo que si se adopta el modelo RLC serie la parte resistiva tiene que aumentar. Por otra, el aumento de frecuencia conlleva la aparición de efectos capacitivos, que disminuyen el valor de la inductancia de la misma. Con las medidas tomadas, Tabla 6.3, se supone un valor de inductancia que varía linealmente con la frecuencia, por lo que la inductancia para el armónico k, L_k, se puede expresar en función de

Tabla 6.3: Valores de impedancia de las bobinas para distintas frecuencias.

	Resistencia (mΩ)			Inductancia (mH)		
Inductancia	100 Hz	120 Hz	1000 Hz	100 Hz	120 Hz	1000 Hz
0.3 mH	0	0	275	0.208	0.208	0.193
0.24 mH	0	0	222	0.167	0.167	0.153
1.81 mH	2	14	1045	1.558	1.565	1.476

las medidas a 100 y 1000 Hz, L_2 y L_{20} respectivamente:

$$L_k = L_2 + \frac{L_{20} - L_2}{20 - 2}(k - 2) \tag{6.1}$$

Las impedancias que simulan el comportamiento de la línea y los transformadores se muestran en la Figura 6.3.

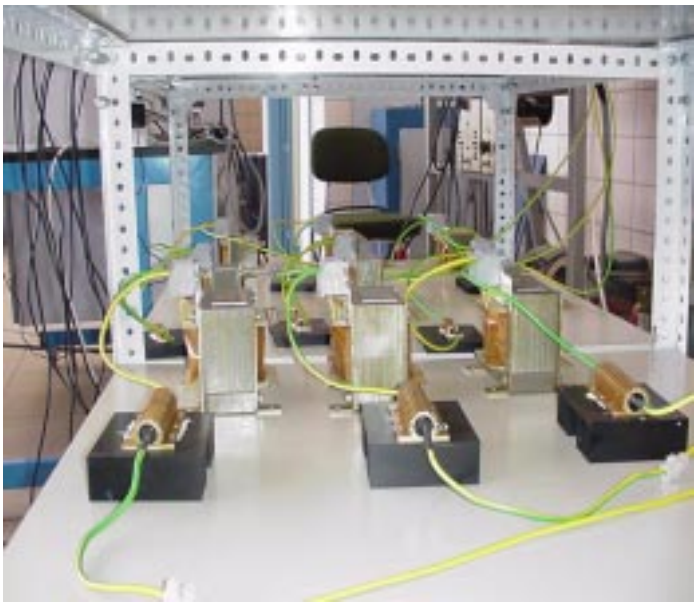
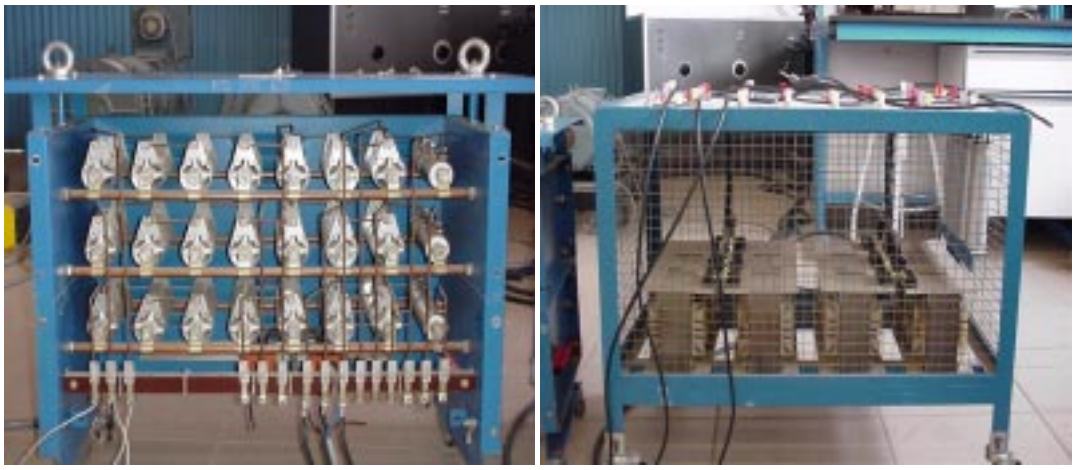


Figura 6.3: Impedancias que simulan el comportamiento de la línea y transformadores.



(a) (b)

Figura 6.4: Carga lineal utilizada. (a) Resistencias. (b) Bobinas.

- Carga lineal. En la Figura 6.4 puede verse la carga lineal utilizada. Está formada por un conjunto de resistencias, situadas en la izquierda de la fotografía mostrada, y bobinas conectados en paralelo, en la parte derecha. La potencia nominal de las resistencias es de 3 kW, mientras que la de las bobinas es de 1.5 kVAR

- Carga no lineal. Se utiliza un variador de velocidad para un motor de corriente alterna. El accionamiento consta de un rectificador no controlado que alimenta un enlace de continua formado por una bobina y un condensador, en cuyas bornas se conecta un inversor que acciona al motor de inducción. Dicho inversor controla la tensión aplicada al motor mediante una modulación por ancho de pulso (PWM). En la Figura 6.5.(a) se muestra el variador de velocidad utilizado. En la Figura 6.5.(b) puede verse un detalle del interior del mismo, en el que se aprecia la bobina, en la parte superior izquierda, y el condensador del enlace de continua, en la parte inferior.

  De este accionamiento, se está tan solo interesado en conocer las intensidades de entrada al rectificador no controlado. Dichas intensidades dependerán del punto de funcionamiento seleccionado. En este caso, tal y como puede verse en la Figura 6.6, el motor de inducción está acoplado a un alternador que alimenta a un grupo de resistencias monofásicas con potencia nominal igual a 750 W. Dado que la frecuencia y tensión nominal del alternador son 50 Hz y 380 V, respectivamente, se seleccio-

(a) (b)

Figura 6.5: Variador de velocidad de alterna utilizado. (a) Exterior. (b) Interior.

Figura 6.6: Grupo motor-generador accionado por el variador de velocidad.

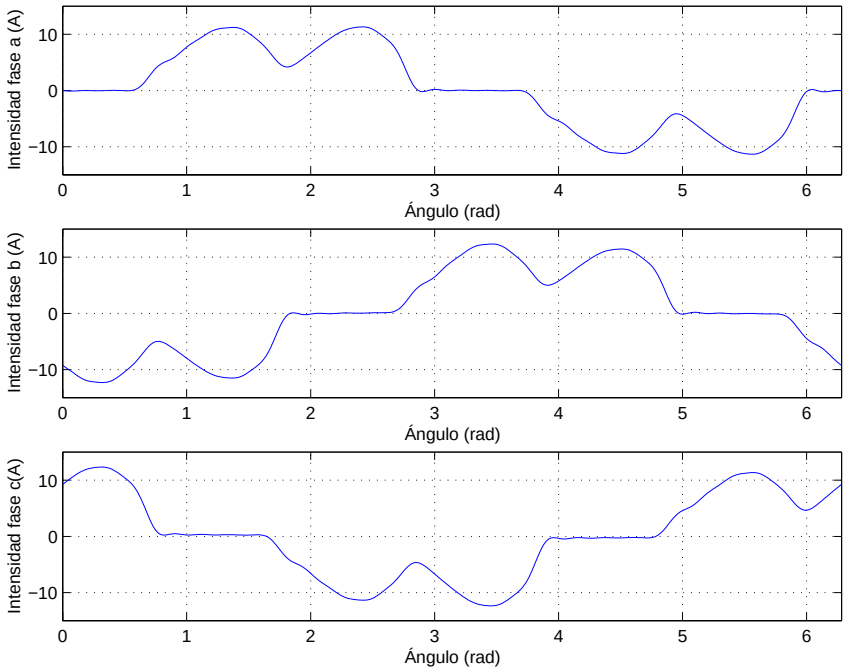


Figura 6.7: Intensidades absorbidas por la carga no lineal.

nan los 50 Hz como consigna para la frecuencia de funcionamiento del variador de velocidad. En estas condiciones de funcionamiento, las intensidades que absorbe el variador de velocidad se muestran en la Figura 6.7, que como se puede comprobar tienen la forma típica de este tipo de accionamientos cuando trabajan sin interrupciones de intensidad.

Dado que el inversor se alimenta a tres hilos, sin neutro, es imposible que se absorban componentes de intensidad homopolares. En este sentido, es posible expresar las tres intensidades de fase anteriores en el dominio de Park, mediante las componentes directa e inversa. Si $\boldsymbol{i}_{abc}$ es un vector formado por las intensidades en cada una de las fases, el vector intensidad en el dominio de Park, $\boldsymbol{i}_{dq}$, se calcula aplicando la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{y}_{dq} = T\boldsymbol{y}_{abc} \tag{6.2}$$

donde T es la matriz:

$$T = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

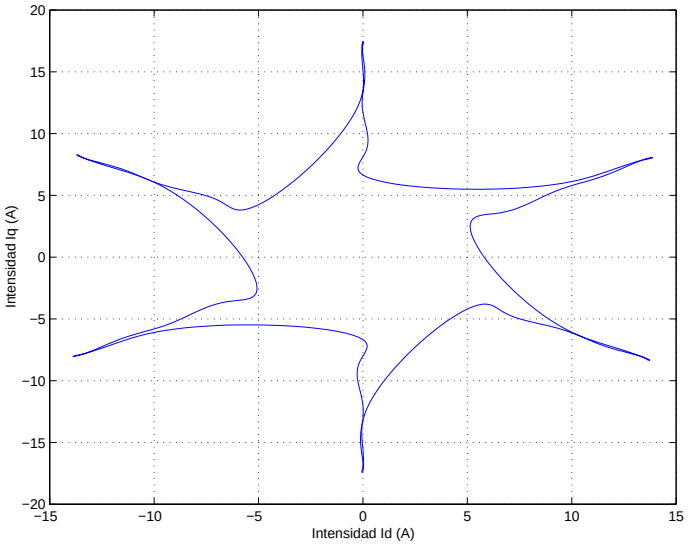
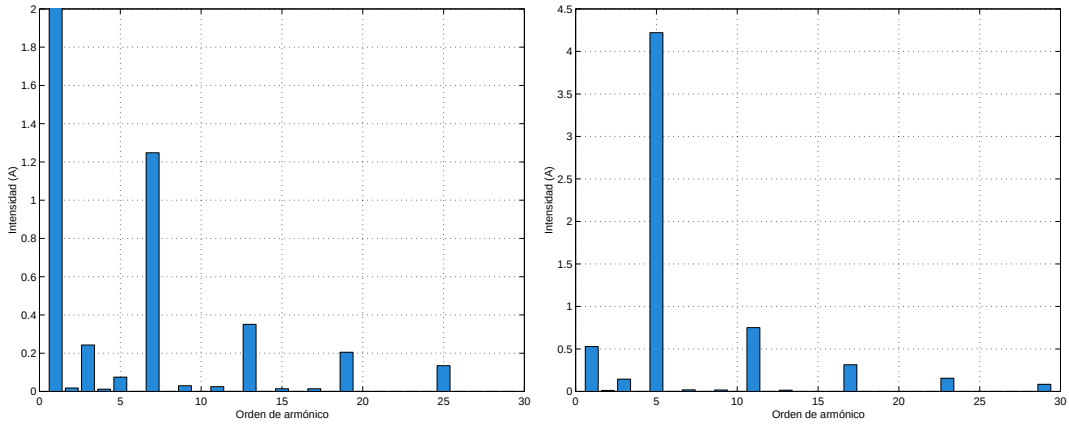


Figura 6.8: Intensidad absorbida por la carga no lineal en el dominio de Park.

Si la intensidad absorbida por el inversor fuese puramente senoidal, su representación sería una circunferencia. La Figura 6.8 muestra la representación en el dominio de Park de las intensidades de fase mostradas en la Figura 6.7, que como puede comprobarse, además de distar mucho de la situación ideal deseable, es reflejo de los armónicos que el inversor está absorbiendo.

La descomposición en serie de Fourier del vector intensidad de Park se muestra en la Figura 6.9. Como puede comprobarse, además de los armónicos característicos absorbidos por los rectificadores no controlados ($6k \pm 1$ con k entero), existen armónicos de órdenes $3k$, que idealmente no están presentes en la alimentación, y que, como se pone de manifiesto en el Anexo A, se deben al desequilibrio que presentan las tensiones de alimentación al variador de velocidad. Estas intensidades serán las que se utilicen para diseñar el compensador pasivo que minimiza la reactiva consumida por el conjunto de la instalación. De este modo, el inversor, mediante la aplicación del principio de sustitución, se modela como un conjunto de fuentes independientes de distintas frecuencias que inyectan las corrientes indicadas en la Figura 6.9.

Por último, la conexión del rectificador de entrada del accionamiento a la red se efectúa a través de una inductancia. El valor que ésta presenta condiciona fuertemente el espectro armónico que tienen las intensidades



(a) (b)

Figura 6.9: Armónicos de la intensidad absorbida por la carga no lineal. (a) Secuencia positiva. (b) Secuencia negativa.

absorbidas por el convertidor [27]. En este sentido, se han realizado medidas para dos casos en los que las inductancias de conmutación tienen valores muy dispares: 0.24 mH y 1.81 mH. Normalmente, el valor de estas inductancias se refieren a la impedancia base del accionamiento que se conecta a red. Para dar una idea de los valores que estas inductancias representarían en el problema original mostrado en el esquema unifilar de la Figura 6.1, se debe asignar una potencia a la carga no lineal. Suponiendo que esta carga es el 50% de la potencia del transformador, las inductancias anteriores presentarían en el problema original un valor del 0.35% y 2.5% respectivamente. La Figura 6.10 compara las intensidades demandadas por la fase a del rectificador en ambos casos.

La Figura 6.11 muestra el conjunto de elementos descritos que han sido instalados en el laboratorio para reproducir la red de la Figura 6.1. En la mesa grande de la derecha se tiene, en la parte superior, el tablero en el que se centralizan las medidas de tensión e intensidad y las conexiones de todos los elementos entre sí. Debajo de esta sección de medida se encuentra el conjunto de impedancias que reproducen el comportamiento de las líneas y transformadores. Más abajo se disponen los filtros sintonizados para la compensación de potencia reactiva y mitigación de armónicos. En la parte izquierda se puede observar el variador de velocidad del motor asíncrono. Dicho motor junto con el generador que acciona, se encuentran en la parte trasera de la mesa descrita. Por último, en la parte izquierda se tiene el computador, soporte del instrumento virtual.

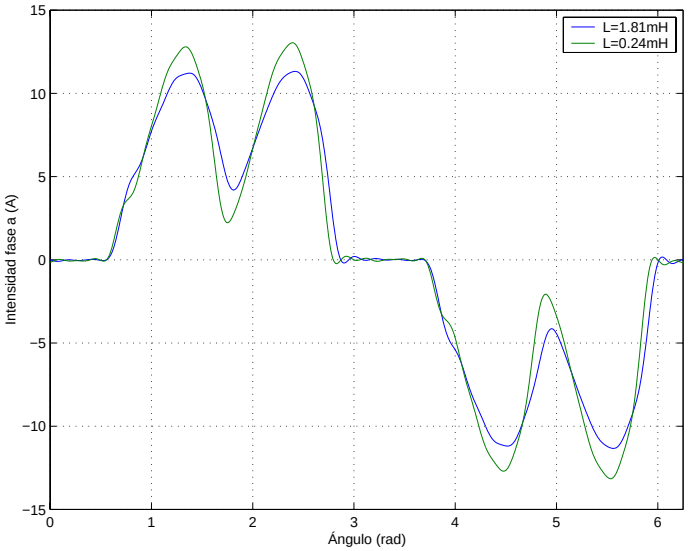
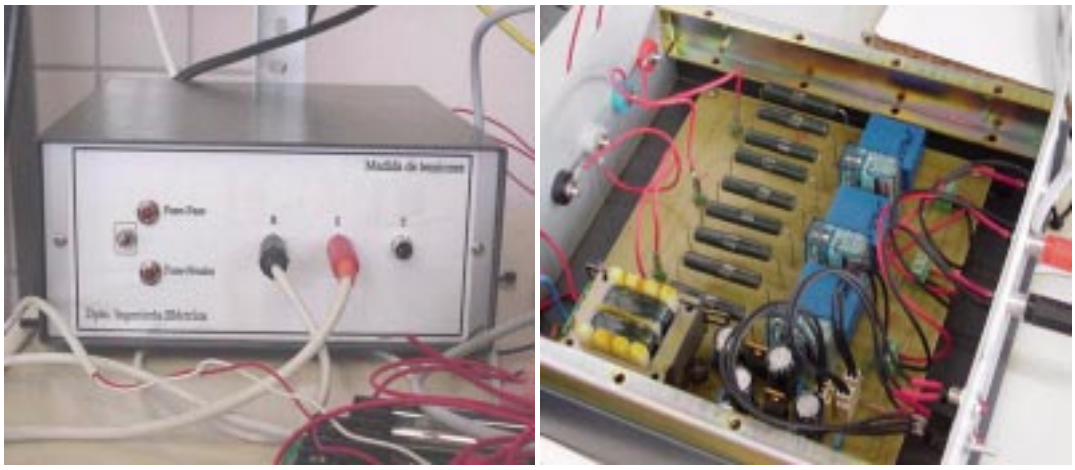


Figura 6.10: Efecto de la inductancia de conmutación en las intensidades del rectificador.

Figura 6.11: Vista general del montaje realizado en el laboratorio.



(a) (b)

Figura 6.12: Transductor de tensión. (a) Exterior. (b) Interior.

6.3 Instrumentación utilizada

Para la toma de medidas de tensión e intensidad en la red de distribución a escala diseñada, se realiza un instrumento de medida virtual, basado en una tarjeta de adquisición de datos y en el software comercial LabView. Este sistema está integrado por los siguientes componentes:

- Transductores de tensión. Dado que el montaje que se realiza es trifásico y se trabaja con magnitudes en el dominio de Park, los transductores que se diseñan son trifásicos, compuestos por tres monofásicos, y pueden medir tanto las tensiones simples como compuestas. Estos transductores, que se basan en el efecto Hall, proporcionan un aislamiento galvánico entre el circuito de potencia y el circuito de señal y mando. La señal de salida de los mismos, comprendida entre los $\pm$5V, se acopla directamente a la tarjeta de adquisición de datos. La Figura 6.12 muestra el transductor trifásico descrito.

- Transductores de intensidad. Los transductores de intensidad utilizados se basan en el efecto Hall. Al igual que los transductores de tensión, proporcionan un aislamiento galvánico entre el circuito de potencia y el de medida, pudiendo conectarse sus salidas directamente a la entrada de la tarjeta de adquisición de datos, pues el rango de tensiones de salida es de $\pm$5V. Para medir una intensidad del sistema tan solo se necesitan dos sensores, pues la inexistencia del conductor neutro hace que la suma

Figura 6.13: Tablero de centralización de sensores de intensidad.

de las tres intensidades de fase se iguale a cero.

Por otra parte, el número de medidas de intensidad que se tiene que realizar es elevado: intensidad de la red, de la carga lineal, de la carga no lineal y de los filtros instaladas. Por estos motivos, todos estos sensores de intensidad se centralizan en una tablero de medida, que se muestra en la Figura 6.13.

- Tarjeta de adquisición de datos. Tiene como misión adquirir todas las medidas de los distintos sensores de tensión e intensidad, previamente descritos, para pasarlas posteriormente al instrumento virtual, encargado del procesamiento de las mismas. La frecuencia de muestreo de la tarjeta debe estar en consonancia tanto con el orden de armónico máximo que se quiere medir como con el número de medidas a realizar.

- Instrumento virtual. Con las medidas aportadas por la tarjeta de adquisición de datos, se realiza el análisis de Fourier de los mismos en el dominio de Park. Posteriormente, además de realizarse una copia a fichero de las componentes armónicas del vector de Park, pueden mostrarse en pantalla tanto las magnitudes de fase, vector de Park y componentes armónicas de la magnitud seleccionada, tal y como se ve en la Figura 6.14.

Para una descripción más detallada tanto de los sensores, tarjeta de adquisición e instrumento virtual utilizados, se remite al lector al Apéndice B.

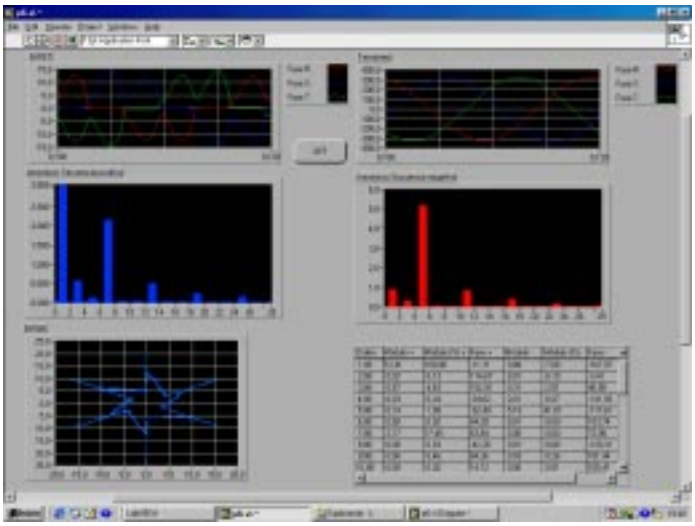


Figura 6.14: Ventana principal del instrumento virtual.

6.4 Compensación con condensador

En este apartado se estudia la compensación de la potencia reactiva mediante el uso de condensadores. El objetivo que se persigue no es encontrar el condensador óptimo que maximiza el factor de potencia, sino establecer una comparación entre resultados experimentales y teóricos, para proceder a la validación de estos últimos. Para ello, se instalan en la red propuesta condensadores de 0.5, 1.5, 2, 2.5 y 3 kVAR, midiéndose la tensión de la fuente, intensidad de la fuente e intensidad de la carga no lineal. En este caso, la carga no lineal está conectada a la red mediante la inductancia de valor más pequeño, 0.24 mH.

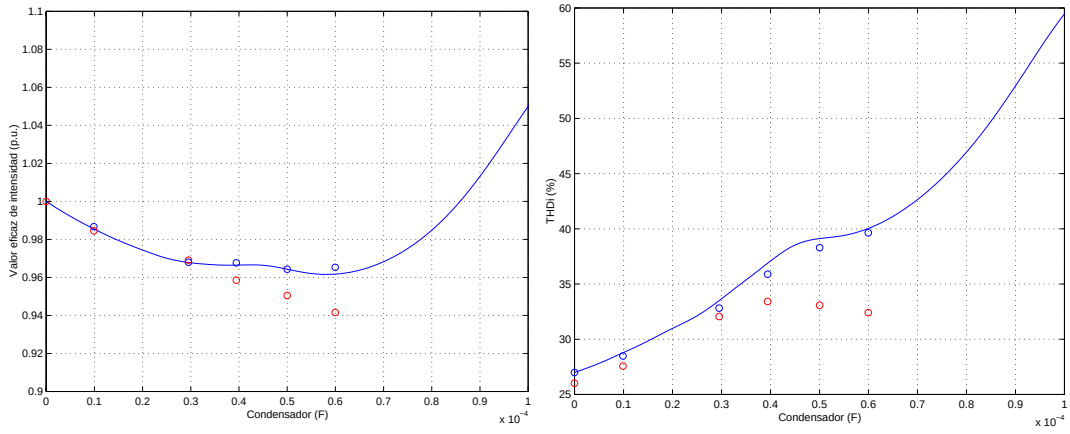
El valor eficaz y la distorsión de la intensidad del sistema para estos condensadores se encuentran reflejados en la Tabla 6.4, comparada con los valores teóricos. Para el cálculo de estos resultados teóricos se ha supuesto, tal y como se ha venido realizando durante el desarrollo de la presente tesis, que la intensidad consumida por la carga no lineal permanece constante, pues el modelo utilizado está formado por un conjunto de fuentes de intensidad independientes a las frecuencias a las cuales aparecen los armónicos demandados. La intensidad teórica se calcula a través de los valores medidos de dicha intensidad, previa a la instalación de los condensadores, y de las medidas de impedancia de los distintos elementos del sistema.

En la Figura 6.15.(a), se tienen los valores de intensidad después de la com-

Tabla 6.4: Comparación de los resultados teóricos y experimentales.

kVAR	Valor eficaz			THDi		
	Exp. (A)	Teórico (A)	Error (%)	Exp. (A)	Teórico (A)	Error (%)
-	23.55	22.86	2.92	26.99	26.02	3.6
0.5	23.18	22.55	2.71	27.57	28.47	3.26
1.5	22.82	22.12	3.06	32.06	32.81	2.33
2	22.57	22.12	1.99	33.42	35.9	7.42
2.5	22.38	22.04	1.51	33.07	38.3	19.42
3	22.17	22.07	0.7	32.42	39.64	22.27

pensación relativos a la intensidad inicial. Dicha figura incluye la comparación de los valores teóricos y experimentales para los condensadores instalados, así como la curva teórica de compensación para otros valores de condensadores. De la misma forma, la Figura 6.15.(b) incluye la misma información, pero concerniente a la distorsión de intensidad. En esta figura, se ve el claro carácter no lineal que presenta la función a minimizar, en este caso es patente la resonancia que se produce con la instalación de los condensadores para compensación del factor de potencia en el decimoprimer armónico. Las distintas resonancias existentes en el sistema se muestran en la Figura 6.16, en la que



(a) (b)

Figura 6.15: Comparación de resultados teóricos y experimentales. (a) Valor eficaz de intensidad del sistema relativo al inicial. (b) Distorsión de intensidad

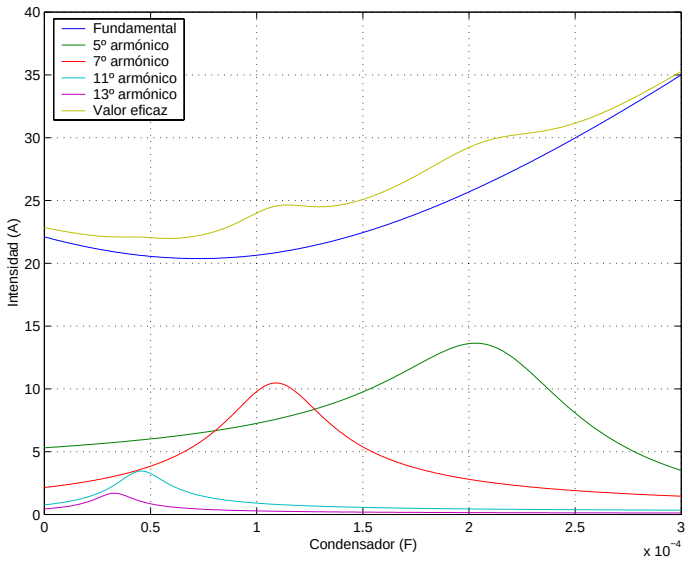
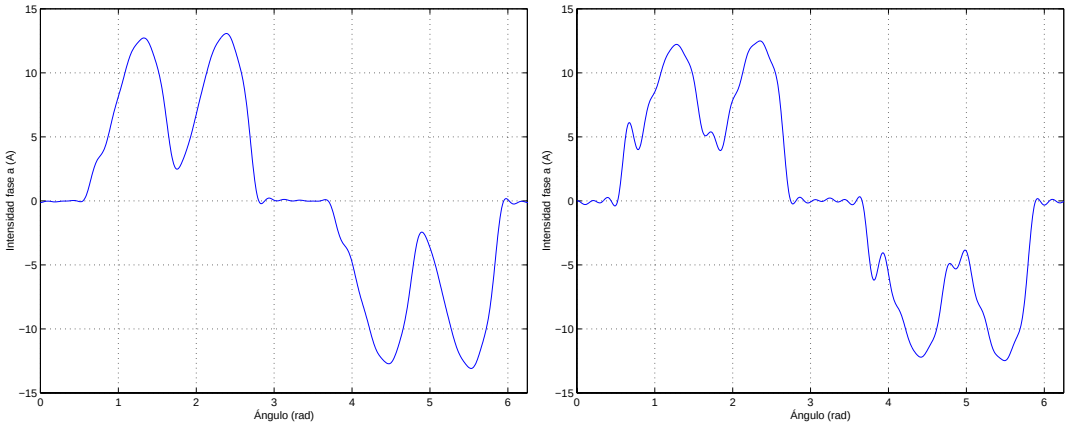


Figura 6.16: Valores eficaces de intensidad de distintos armónicos en función de la capacidad del condensador.

se representan los valores eficaces de intensidad para cada armónico. Conforme el orden de armónico aumenta, el valor del condensador que produce la resonancia es menor.

Por otra parte, como puede comprobarse en la información resumida tanto en la Tabla 6.4 como en la Figura 6.15, los valores de teóricos se alejan de los experimentales conforme el valor de la capacidad del condensador va aumentando. Estas desviaciones entre ambos se deben a que la intensidad absorbida por la carga no lineal no permanece constante, sino que varía al instalar los condensadores. En la Figura 6.17 se muestran las intensidades de una de las fases de la carga no lineal para un caso sin condensadores y para el condensador de 2.5 kVAR instalado. Si bien los periodos de conducción son similares para ambas intensidades, existe una gran diferencia en las conmutaciones entre dichos periodos. En el caso en el que no se tienen condensadores instalados, se observa que la dinámica es de primer orden, mientras que con el condensador, las oscilaciones se deben a que el circuito resultante es de segundo orden.

Esta diferencia en la dinámica de las conmutaciones tiene su reflejo en el espectro armónico. En la Figura 6.18, se muestra la evolución del fundamental y de los armónicos quinto, séptimo y decimoprimero con el valor de la capacidad del condensador instalado. Estos armónicos permanecen constantes con capacidades del condensador pequeñas, hasta 0.5 kVAR, pero a partir de



(a) (b)

Figura 6.17: Intensidades absorbidas por la fase *a* de la carga no lineal. (a) Sin condensadores. (b) 2.5 kVAR de condensadores.

este punto las variaciones son considerables, no sólo en el valor eficaz de los mismos, sino en sus componentes real e imaginaria. Esto provoca las acusadas diferencias entre los valores teóricos y experimentales mostrados en la Figura 6.15.

Por tanto, y a la vista de estos resultados, se hace necesario contemplar las variaciones de las intensidades consumidas por la carga no lineal, no siendo del todo apropiado el uso de fuentes independientes de intensidad para la representación de la carga no lineal [60]. Para ello, se desarrolla un modelo del variador de velocidad utilizado, que se expone en el Apéndice A. El método utilizado para calcular las intensidades después de la compensación teniendo en cuenta las variaciones de intensidad del inversor se describe en la siguiente sección.

6.4.1 Interacción red-carga no lineal

La gran diferencia existente entre los resultados teóricos y experimentales se debe a que la suposición de intensidades constantes en la carga no lineal antes y después de la compensación no es adecuada. Es necesario, por tanto, realizar un modelo de la carga no lineal utilizada. Dicho modelo, que se desarrolla en el Apéndice A, tiene como características principales las que se enumeran a continuación:

- Se considera que el funcionamiento del variador de velocidad es sin interrupciones en la intensidad, tal y como se muestra en la Figura 6.7. En

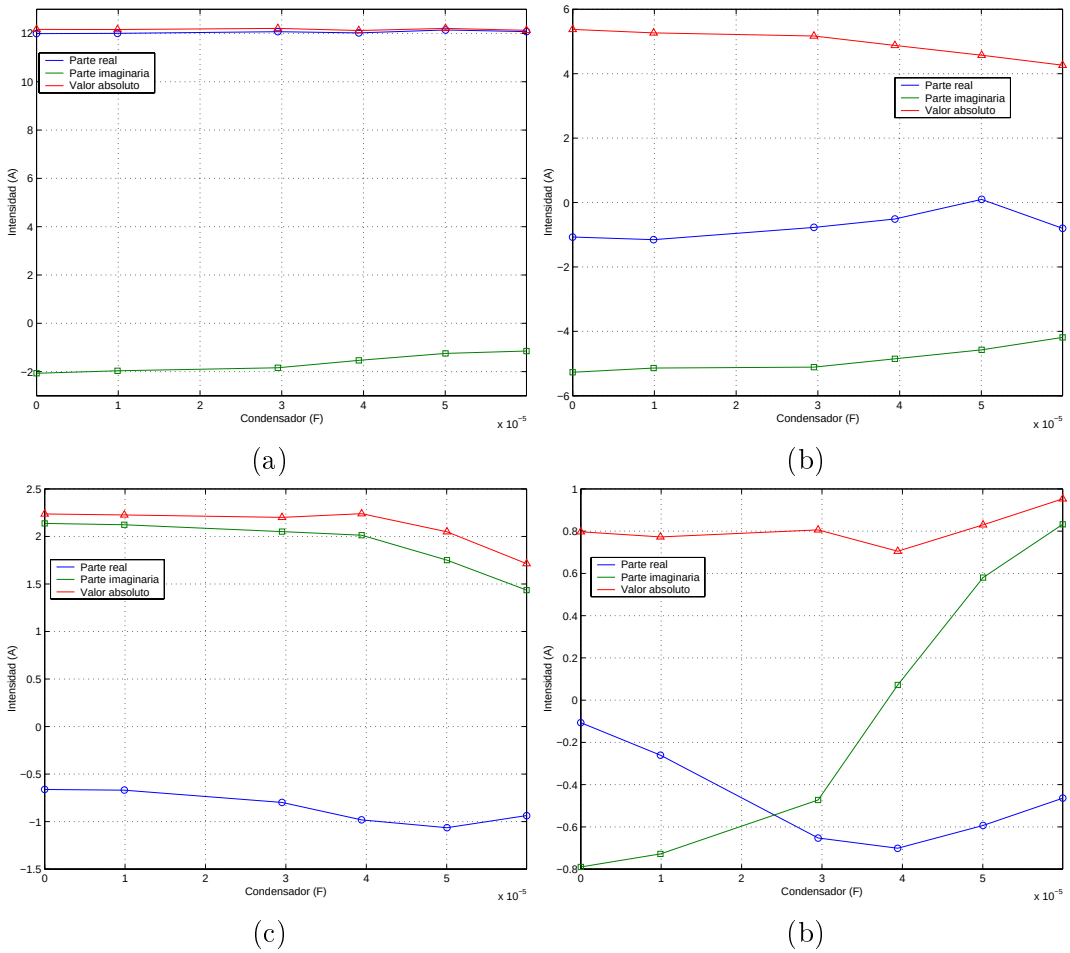


Figura 6.18: Variación de los armónicos de la carga no lineal con la capacidad del condensador. (a) Fundamental. (b) (b) Quinto armónico. (c) Séptimo armónico. (d) Decimoprimer armónico.

este sentido, en el desarrollo del modelo, además de los periodos de conducción o corte de los elementos de potencia del rectificador de entrada del variador, se tienen que tener en cuenta los periodos de conmutación entre los mismos.

- La tensión de alimentación puede presentar desequilibrios y armónicos, si bien estos últimos son sólo de orden impar. La ausencia de armónicos de orden par hace que las semiondas positiva y negativa de la tensión sean idénticas, lo cual reduce el número de ecuaciones que se tienen que resolver. En este sentido, el modelo mejora otros existentes para convertidores alterna/continua con rizado en el lado de continua cuando son alimentados con tensiones equilibradas [36], [78], [37] al poder tratar desequilibrios. Por otra parte, presenta una alternativa a las formulaciones realizadas para el análisis de armónicos de convertidores alimentados con tensiones desequilibradas [12].

Con el modelo desarrollado sólo es posible realizar el estudio de una red formada exclusivamente por el convertidor con su inductancia de conmutación, no siendo viable el análisis de la red de la Figura 6.1, por la presencia de elementos en paralelo con el convertidor en su punto de conexión. Por estos motivos, se hace necesario realizar un análisis de interacción armónica entre la red y el convertidor o balance de armónicos. Estos métodos dividen a la red en dos partes: lineal y no lineal. Básicamente, consiste en plantear unas funciones de error, no lineales, que tendrán en cuenta para cada uno de los armónicos considerados las diferencias de los cálculos efectuados en ambas redes. Para resolver el problema es necesario la aplicación de procesos iterativos, no sólo por el carácter no lineal de las funciones de error planteadas, sino para actualizar los valores de los armónicos inyectados por la carga no lineal. Descripciones detalladas de este problema con diferentes aplicaciones pueden encontrarse en [86], [36], [78] y [79].

El modelo de la carga no lineal desarrollado en el Apéndice A permite obtener los armónicos de intensidad de dicha carga. Estos armónicos son función de los armónicos de tensión existentes en el punto de conexión y de la tensión del enlace de continua, o lo que es lo mismo, de la potencia que absorbe el variador de velocidad. De esta forma, la carga no lineal puede ser representada por una conjunto de intensidades armónicas dependientes de las tensiones:

$$I_k = f(U_1, \ldots, U_n, U_{dc}) \tag{6.4}$$

La parte lineal de la red se representa por el equivalente Thevenin de la misma en el punto de conexión de la carga no lineal. Para que exista un

balance de armónicos entre las partes lineal y no lineal, se tiene que cumplir la ecuación de balance para cada armónico [36]. Expresando dicha ecuación en el dominio de Park:

$$\boldsymbol{U}_{lk} = \boldsymbol{U}_{Thk} - \boldsymbol{Z}_{lk}\boldsymbol{I}_k(U_1, \ldots, U_n, U_{dc}) \tag{6.5}$$

A partir de la ecuación (6.5) pueden definirse las funciones de error, que tendrán que anularse una vez alcanzado el equilibrio. Por cada armónico, se tendrán dos incógnitas, módulo y argumento de la tensión armónica, y dos funciones de error correspondientes a la parte real e imaginaria:

$$F_{rk} = U_{lkr} - U_{Thkr} + R_{lk}I_{kr} - X_{lk}I_{kx} \tag{6.6}$$
$$F_{xk} = U_{lkx} - U_{Thkx} + R_{lk}I_{kx} + X_{lk}I_{kr} \tag{6.7}$$

Aplicando el algoritmo de Newton-Raphson a (6.6) y (6.7), se obtiene el siguiente sistema a resolver de forma iterativa:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_{rk}}{\partial U_k} & \frac{\partial F_{rk}}{\partial \alpha_k} \\ \frac{\partial F_{xk}}{\partial U_k} & \frac{\partial F_{xk}}{\partial \alpha_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_k \\ \Delta \alpha_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_{rk} \\ F_{xk} \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

Los términos del jacobiano de (6.8) son función tanto de las tensiones como de las derivadas de la intensidad de Park de la carga no lineal:

$$\frac{\partial F_{rk}}{\partial U_h} = (\cos\alpha_k) + R_{lk}Re\left[\frac{\partial \boldsymbol{I}_k}{\partial U_h}\right] - X_{lk}Im\left[\frac{\partial \boldsymbol{I}_k}{\partial U_h}\right] \tag{6.9}$$
$$\frac{\partial F_{xk}}{\partial U_h} = (\sin\alpha_k) + R_{lk}Im\left[\frac{\partial \boldsymbol{I}_k}{\partial U_h}\right] + X_{lk}Re\left[\frac{\partial \boldsymbol{I}_k}{\partial U_h}\right] \tag{6.10}$$
$$\frac{\partial F_{rk}}{\partial \alpha_h} = (-U_k sen\alpha_k) + R_{lk}Re\left[\frac{\partial \boldsymbol{I}_k}{\partial \alpha_h}\right] - X_{lk}Im\left[\frac{\partial \boldsymbol{I}_k}{\partial \alpha_h}\right] \tag{6.11}$$
$$\frac{\partial F_{xk}}{\partial U_h} = (U_k\cos\alpha_k) + R_{lk}Im\left[\frac{\partial \boldsymbol{I}_k}{\partial \alpha_h}\right] + X_{lk}Re\left[\frac{\partial \boldsymbol{I}_k}{\partial \alpha_h}\right] \tag{6.12}$$

Los primeros sumandos de las ecuaciones anteriores aparecen sólo en el caso en el que $k = h$. Por otra parte, las derivadas de los armónicos de intensidad respecto al módulo y fase de las tensiones de alimentación de la carga no lineal, se especifican en el Apéndice A.

En cada una de las iteraciones realizadas para resolver las ecuaciones (6.8), al existir una variación de las tensiones en bornas de la carga no lineal, es necesario volver a calcular los armónicos de intensidad mediante la aplicación del modelo desarrollado.

Si se aplica este proceso para calcular las intensidades que demanda el inversor en el caso de la instalación de condensadores para compensar el factor de potencia, se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 6.19. En ella se compara el valor teórico y experimental de las intensidades del rectificador para la fase *b*. Se ha elegido esta fase, porque se puede comprobar claramente el desequilibrio existente en las tensiones, que se manifiesta en la diferente amplitud de los dos pulsos por semiperiodo de la intensidad absorbida. Para el cálculo teórico de estas intensidades se han tenido en cuenta los armónicos predominantes:

- Secuencia positiva: fundamental, tercero, séptimo, decimotercero, decimonoveno y vigesimoquinto.
- Secuencia negativa: fundamental, tercero, quinto, decimoprimero, decimotercero, vigesimotercero, vigesimonoveno.

Comparando los resultados teóricos y experimentales en el dominio de la frecuencia, se obtiene la Figura 6.20. En ella se compara el valor eficaz y la parte imaginaria de los armónicos más relevantes respecto a la tensión existente en bornas de la carga no lineal frente al condensador instalado.

Calculando con estos valores de intensidad de la carga no lineal la intensidad que circula por la línea de alimentación, se obtienen los resultados teóricos para el valor eficaz y distorsión de intensidad que se comparan con los experimentales en la Tabla 6.5 y la Figura 6.21. Al igual que en la Figura 6.15, se representa el valor eficaz de la intensidad respecto al existente antes de la compensación y el valor de distorsión de intensidad expresado porcentualmente.

La similitud existente entre los resultados teóricos, calculados a partir del modelo del convertidor y la resolución de la interacción armónica existente entre éste y la red, y experimentales es patente. Esta concordancia no sólo se muestra en la representación temporal de las intensidades, Figura 6.19, y los armónicos en el dominio de Park, Figura 6.20, sino también en los resultados globales de la compensación de la Tabla 6.5. Estos resultados ponen de manifiesto que las variaciones de intensidad deben tenerse en cuenta. No obstante, el caso propuesto es, en cierta medida, extremo, pues el valor de la inductancia de conmutación es extremadamente pequeño. Con inductancias de conmutación mayores, si bien siguen existiendo diferencias en las intensidades absorbidas por la carga no lineal cuando se insertan condensadores, éstas no son tan acusadas, debido al efecto de alisado de intensidad que dichas inductancias consiguen.

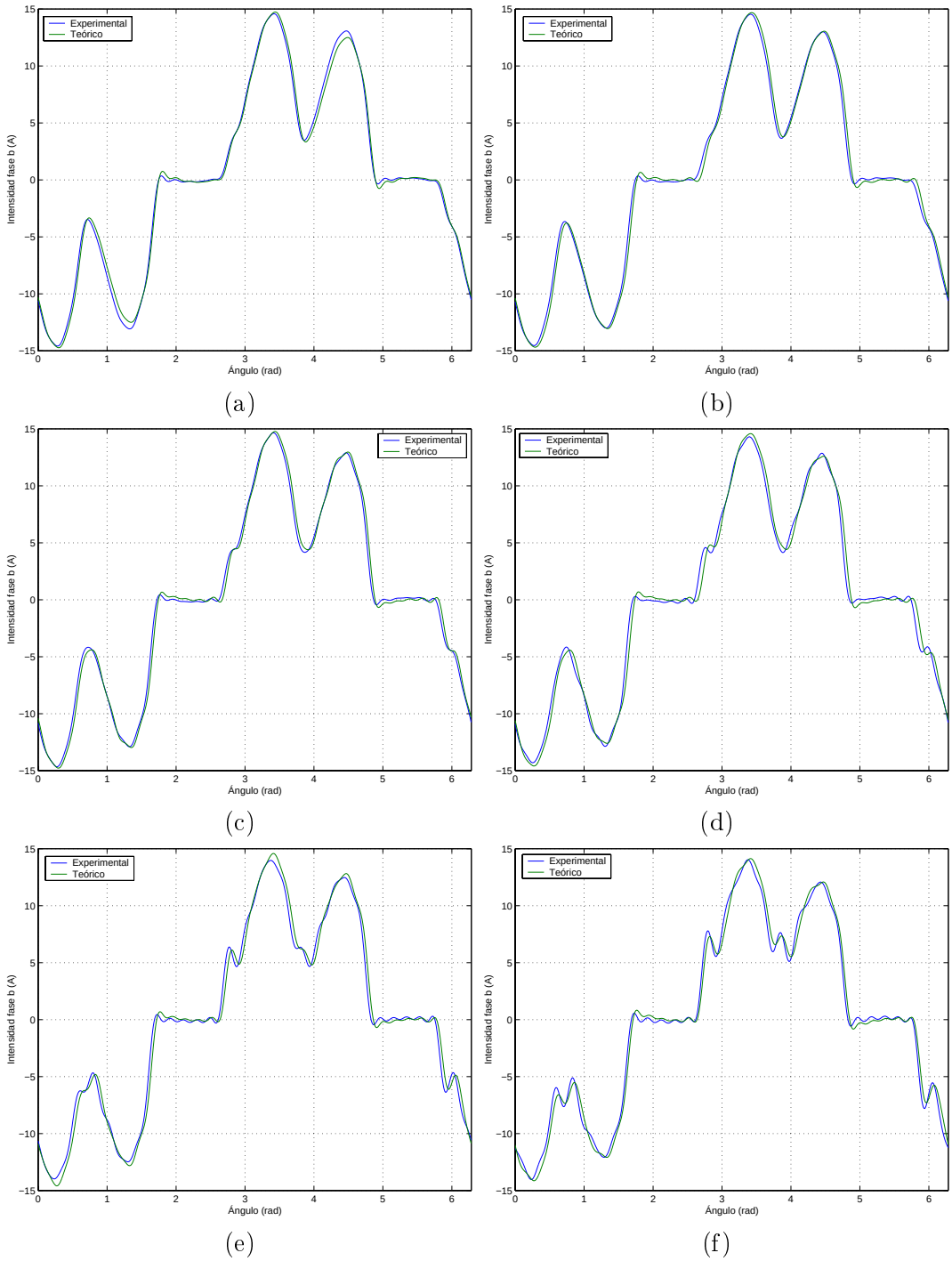


Figura 6.19: Condensador. Comparación de las intensidades de la fase *b*. (a) Sin condensador. (b) 0.5 kVAR. (c) 1.5 kVAR. (d) 2 kVAR. (e) 2.5 kVAR. (f) 3 kVAR.

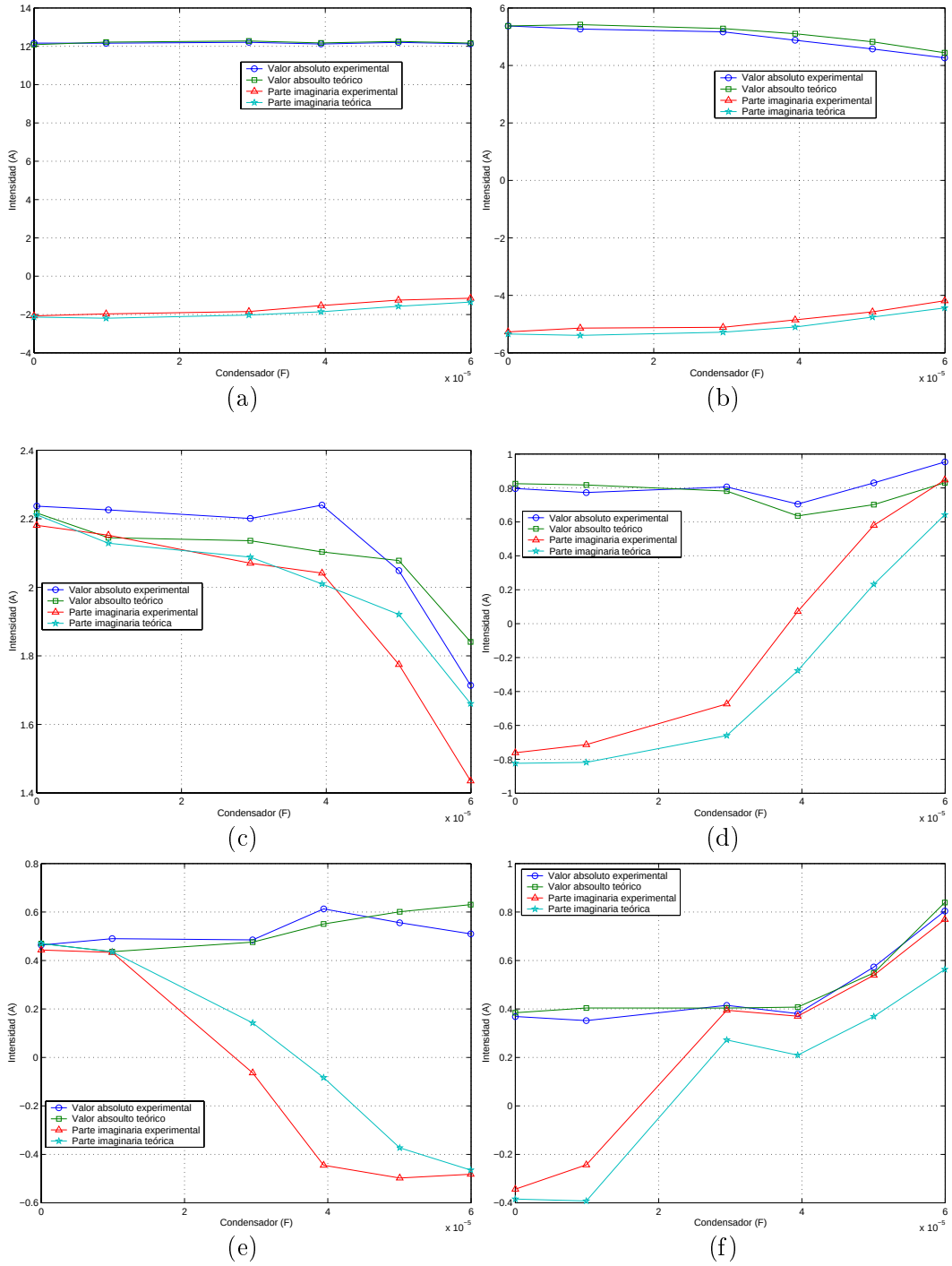
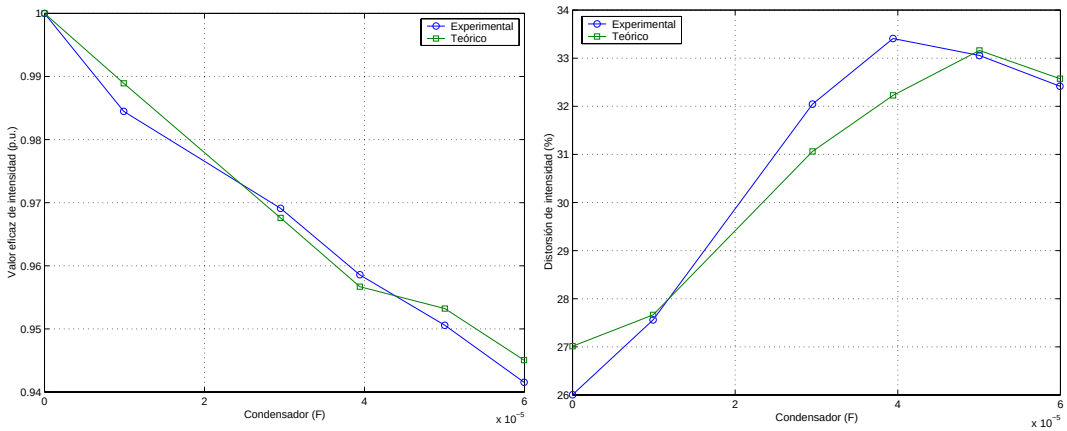


Figura 6.20: Condensador. Comparación de los armónicos en función del condensador instalado. (a) Fundamental. (b) Quinto armónico (c) Séptimo armónico. (d) Decimoprimer armónico. (e) Decimotercer armónico (f) Decimoséptimo armónico.

Tabla 6.5: Comparación de los resultados teóricos y experimentales considerando la interacción entre la red y el condensador.

kVAR	Valor eficaz			THDi		
	Exp. (A)	Teórico (A)	Error (%)	Exp. (A)	Teórico (A)	Error (%)
-	23.55	23.25	1.25	26.99	27.01	3.87
0.5	23.18	22.99	0.81	27.57	27.66	0.38
1.5	22.82	22.50	1.41	32.06	31.06	3.06
2	22.57	22.24	1.44	33.42	32.22	3.53
2.5	22.38	22.16	0.98	33.07	33.16	0.31
3	22.17	21.97	0.88	32.42	32.57	0.49



(a) (b)

Figura 6.21: Comparación de resultados teóricos y experimentales con interacción red-carga no lineal. (a) Valor eficaz de intensidad del sistema relativo al inicial. (b) Distorsión de intensidad.

6.5 Compensación con banco de filtros sintonizados

En esta sección se procede a realizar el estudio, para el ejemplo propuesto, de la compensación de reactiva y mitigación de armónicos mediante la instalación de filtros pasivos sintonizados. Las condiciones de funcionamiento son idénticas al caso de compensación con condensador, variando únicamente el valor de la reactancia de conmutación que, para este caso, es de 1.81 mH.

6.5.1 Optimización del banco de filtros

El problema se plantea de la forma especificada en el Capítulo 4: dadas unas frecuencias de sintonización de los filtros pasivos, y en función de los armónicos existentes en la tensión del sistema e intensidad de la carga no lineal, se obtienen las regiones factibles, delimitadas por los hiperplanos de resonancia, en las que se tiene que encontrar un mínimo local. Comparando los mínimos locales de las distintas regiones factibles se obtienen los valores de los elementos que componen el banco óptimo para la situación especificada. Además de las restricciones introducidas por las resonancias, se añaden al problema las restricciones adicionales definidas en el Capítulo 4, para tener en cuenta que el conjunto formado por la carga y el compensador no deben ceder potencia reactiva a la red y, por otra parte, dejar una distancia prudencial entre los mínimos y los máximos que aparecen en la impedancia equivalente vista desde el punto de conexión de los filtros. En este sentido, hay que tener en cuenta que una mayor exigencia en este último aspecto, es decir, separaciones elevadas entre máximos y mínimos, conlleva una compensación más pobre de potencia reactiva, por lo cual hay que llegar a una solución de compromiso. Tomando como base las posibles reducciones de la capacidad de los condensadores, tal como se vio en el Capítulo 4, se toman como valores límite para la situación de los máximos de la impedancia, k_{lim}, los armónicos situados 0.5 órdenes por debajo de la frecuencia de sintonización de los filtros, k_h:

$$k_{lim} = k_h - 0.5 \tag{6.13}$$

Tras realizar una medida de las tensiones de red e intensidades de la carga no lineal y calcular los armónicos de los vectores de Park asociados, que se muestran en las tablas 6.6 y 6.7 respectivamente, se procede al diseño del filtro pasivo. En el proceso de optimización no han sido tenidos en cuenta todos los armónicos que se extraen del proceso de medida, tan solo los más relevan-

Tabla 6.6: Armónicos de la tensión de alimentación.

Secuencia positiva			Secuencia negativa		
Orden armónico	Módulo (V)	Fase (rad)	Orden armónico	Módulo (V)	Fase (rad)
1	386.74	0	1	2.75	2.69
3	0	0	3	0.97	-1.91
5	0.62	-0.52	5	7.10	2.50
7	1.46	0.58	7	0.97	-1.67
9	0	0	9	0.39	2.21
11	0	0	11	0.70	-0.95

tes, considerándose como tales todos aquellos cuyo valor relativo respecto al fundamental es superior al 0.1%.

La Tabla 6.8 compara los resultados de la compensación con dos y tres filtros sintonizados a los armónicos predominantes: quinto, séptimo y decimoprimero. Se muestran valores relativos a la situación previa a la compensación, tanto de valor eficaz y distorsión de intensidad del sistema como de distorsión de tensión en la carga. Como puede comprobarse, ambos filtros realizan de forma similar la compensación de reactiva, siendo las características de filtrado de armónicos un poco superiores para el caso de tres filtros sintonizados. La poca mejora existente entre estos dos casos justifica el no realizar el estudio para el caso de instalar un cuarto filtro sintonizado al armónico decimotercero.

En el proceso de optimización del diseño de estos filtros se han tomado, para ambos casos, como armónicos límite en los cuales se pueden situar las resonancias del sistema los armónicos 4.5 y 6.5. Tal y como se comentó en el Capítulo 4, cuanto más exigente se es a la hora de fijar estos límites, es decir, cuanto más alejados estén de las frecuencias de sintonización, menor será la compensación de potencia reactiva realizada. En las figuras 4.11 y 4.12 de dicho capítulo, muestran que la disminución de los límites en los cuales se pueden situar las resonancias, k_{ilim}, conlleva la utilización de condensadores de mayor tamaño, lo cual, normalmente, está asociado a cesión de potencia reactiva en el armónico fundamental si no se aplica la restricción de potencia reactiva en dicho armónico. Esto puede comprobarse en las figuras 6.22 y 6.23 donde se comparan dos bancos compuestos por dos filtros sintonizados. Para el primer caso se fijan los límites en 4.5 y 6.5 con restricción de potencia

Tabla 6.7: Armónicos de la intensidad de la carga no lineal.

Secuencia positiva			Secuencia negativa		
Orden armónico	Módulo (V)	Fase (rad)	Orden armónico	Módulo (V)	Fase (rad)
1	11.79	-0.21	1	0.53	-2.67
2	0.02	-0.91	2	0.01	-0.71
3	0.24	2.34	3	0.15	0.73
4	0.01	-0.79	4	0	0
5	0.08	-1.76	5	4.22	-1.93
7	1.25	0.68	7	0.02	0.49
9	0.03	-0.05	9	0.02	1.57
11	0.03	2.57	11	0.75	-1.23
13	0.35	-1.06	13	0.02	-0.89
15	0.01	-0.89	15	0	0
17	0.01	1.42	17	0.31	-0.27
19	0.2	-2.45	19	0	0
23	0	0	23	0.16	0.89
25	0.14	2.63	25	0	0
29	0	0	29	0.08	2.19

reactiva en el fundamental y para el segundo caso en 4.2 y 6.2 sin restricción de potencia reactiva. En el primer caso sólo existe una región factible, y el óptimo se encuentra situado en la intersección de las barreras de las restricciones de compensación de reactiva en el fundamental y en el límite 4.5. Para el segundo caso, en el que se disminuyen los límites a 4.2 y 6.2 respectivamente, y no se considera la restricción de compensación de reactiva, se tienen cuatro zonas factibles, mostrándose los óptimos locales de tres de ellas. En este caso, el óptimo absoluto es el que se encuentra en la intersección de las restricciones de las dos resonancias ficticias. Sin embargo, se puede comprobar cómo dicho óptimo está situado en la zona positiva de la restricción de potencia reactiva en el armónico fundamental. Esto quiere decir que si dicha restricción se hubiera incluido en la resolución de las ecuaciones, no habría existido ninguna zona factible.

Además de los resultados de la Tabla 6.8, las figuras 6.24 a 6.27 muestran las ganancias, ya expuestas en el Capítulo 3 por (3.112), (3.113) y (3.114), que definen el comportamiento del filtro en frecuencia. A partir de estas figuras,

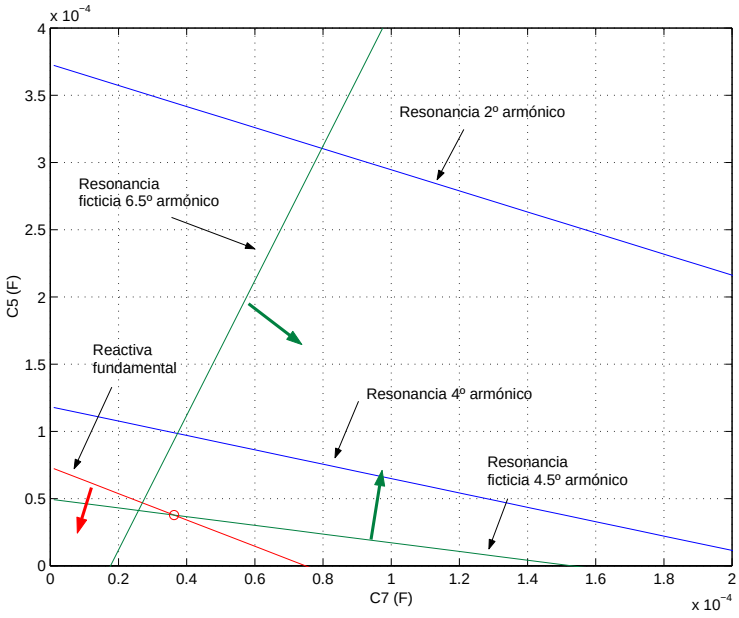


Figura 6.22: Representación de las restricciones con límites 4.5 y 6.5.

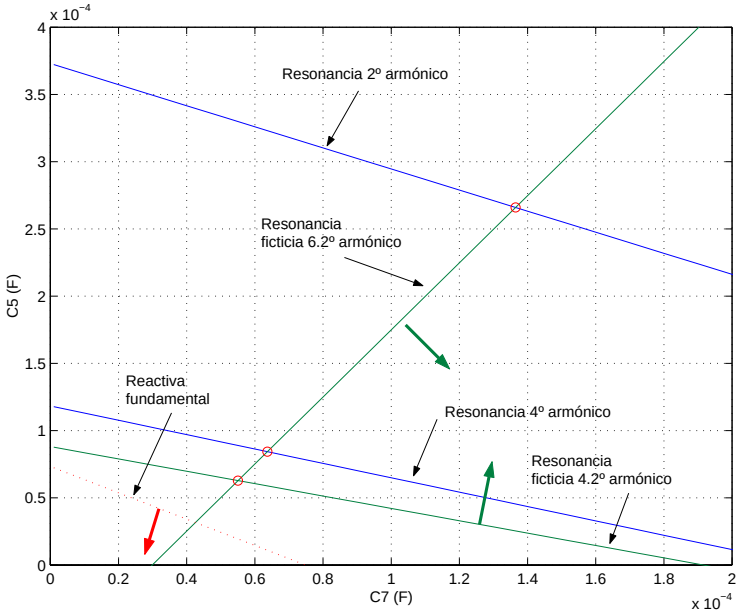


Figura 6.23: Representación de las restricciones con límites 4.2 y 6.2.

Tabla 6.8: Comparación de dos bancos de filtros. $k_{lim1} = 4.5$, $k_{lim2} = 6.5$.

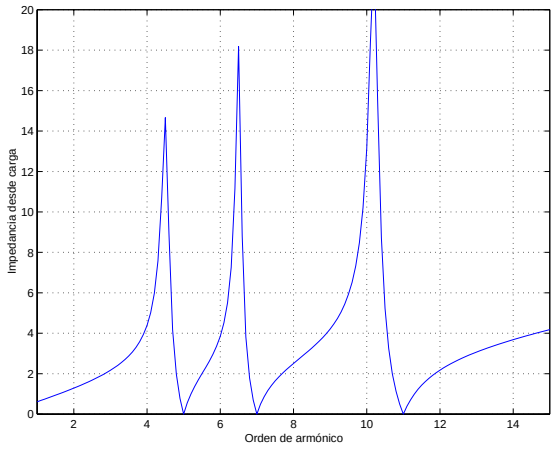
Magnitud	Banco dos filtros	Banco tres filtros
Condensador Filtro 5 (μF)	37.8	39.45
Condensador Filtro 7 (μF)	36.29	22.70
Condensador Filtro 11 (μF)	-	12.04
Valor eficaz relativo (p.u.)	0.913	0.913
THDi relativo (p.u.)	0.695	0.687
THDu relativo (p.u.)	0.472	0.343

se pueden extraer las siguientes conclusiones para cada una de las ganancias representadas:

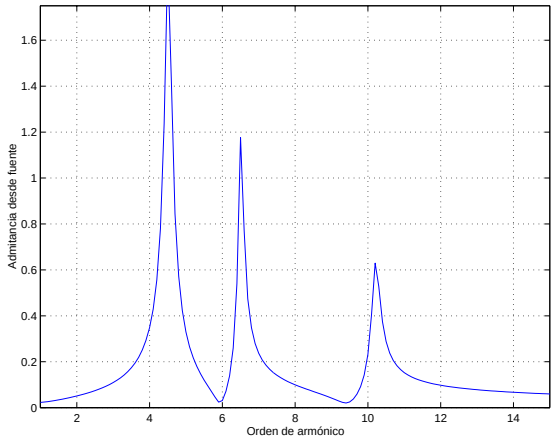
- En la Figura 6.24.(a) se puede comprobar cómo las resonancias que se introducen por los filtros sintonizados en los armónicos quinto y séptimo se sitúan sobre los límites impuestos, que en este caso han sido los armónicos 4.5 y 6.5.

- Admitancia vista desde la fuente, Figura 6.24.(b). Las restricciones adicionales para la situación de las resonancias del sistema se imponen sobre la impedancia vista desde la carga, lo cual implica que el origen de la polución armónica es la intensidad inyectada por la carga no lineal, siendo la tensión del sistema senoidal. Al tener en cuenta la admitancia vista desde la fuente, la fuente de polución es la tensión del sistema, mientras que la intensidad inyectada por la carga no lineal, se pasiva. La Figura 6.24.(b) muestra que, si bien las restricciones no han sido planteadas directamente sobre la admitancia sino sobre la impedancia desde la carga, dichas restricciones tienen como efecto adicional que no se produzcan valores elevados de la admitancia sobre los armónicos sintonizados. De esta forma, las intensidades que circulan hacia el filtro producidas por la existencia de armónicos en la tensión de red no se amplifican en exceso.

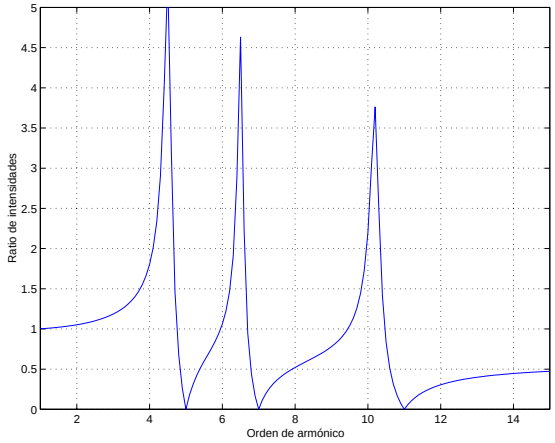
- Atendiendo a la Figura 6.24.(c) en la que se muestra la amplificación de intensidades, se puede comprobar que existe una atenuación para todos los órdenes de armónicos impares enteros, salvo para el armónico de orden tres.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.24: Ganancias después de la instalación del banco de filtros.(a) Impedancia desde la carga. (b) Admitancia desde la fuente. (c) Ganancia de intensidades.

Tabla 6.9: Dimensionado previo de los filtros pasivos.

Armónico sintonizado	Bobina		Condensador	
	L (mH)	I (A)	C (μF)	U (V)
5	10.27	8	39.45	400
7	9.11	5	22.70	400
11	7.61	3	12.04	400

6.5.2 Dimensionado de los componentes del filtro

A la vista de los resultados del proceso de optimización mostrados en la Tabla 6.8, se decide instalar un banco formado por filtros sintonizados al quinto, séptimo y decimoprimer armónicos. En esta sección se calculan los distintos elementos del filtro: bobinas y condensadores.

A partir de la frecuencia de sintonización y el valor de la capacidad del filtro se pueden calcular las inductancias de las bobinas. Estas inductancias tienen que estar diseñadas para la intensidad que absorbe cada rama del filtro. Dicha intensidad se calcula a partir de la tensión en el punto de conexión y de la impedancia de cada uno de los filtros. Esta intensidad se incrementa un 50% respecto a su valor original para evitar posibles sobrecargas de las bobinas ante cambios de las condiciones de funcionamiento.

Los condensadores se especifican mediante su capacidad y la tensión nominal de diseño. La tensión que deben soportar los condensadores es sensiblemente superior a la existente en bornas del filtro. Dicha tensión se calcula por la expresión:

$$U_c^2 = \sum_{k \neq k_h} \left(\frac{U_k}{(k/k_h)^2 - 1} \right)^2 \tag{6.14}$$

siendo U_c el valor de tensión eficaz de diseño del condensador, U_k el valor eficaz de la tensión en bornas del filtro para el armónico *k-esimo* y k_h el armónico en el cual el filtro está sintonizado.

Con estas consideraciones, las especificaciones de los componentes de cada uno de los filtros es la reflejada en la Tabla 6.9. Sin embargo, la construcción de estos filtros tiene que realizarse a partir de componentes pasivos disponibles en el mercado. El proceso que se sigue para formar el banco de filtros es realizar la batería de condensadores a partir de asociaciones serie-paralelo que consigan valores aproximados a los dados en la Tabla 6.9, para posteriormente realizar una bobina con el valor adecuado que satisfaga la frecuencia de sintonización.

Figura 6.25: Filtros pasivos instalados.

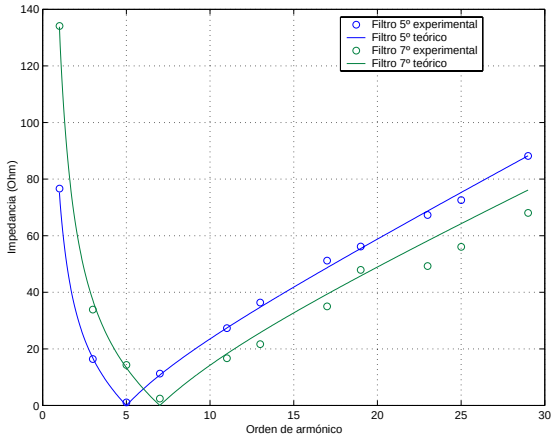
Tabla 6.10: Dimensionado final de los filtros pasivos.

Armónico sintonizado	Bobina		Condensador	
	L (mH)	I (A)	C (μF)	U (V)
5	10.00	9	40.50	400
7	8.85	6	23.3	400
11	8.05	3	10.38	400

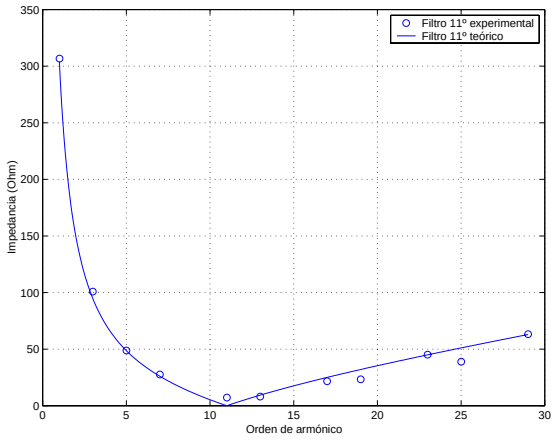
De esta manera, los valores de los componentes de los filtros que se instalan, mostrados en la Figura 6.25, son los recogidos en la Tabla 6.10.

En la Figura 6.26 se muestra la comparación de los valores teóricos y experimentales de la impedancia de cada uno de los filtros sintonizados componentes del banco. Se puede observar como el filtro del quinto armónico y séptimo armónico están bien sintonizados, al presentar baja impedancia a la frecuencia de sintonización, mientras que el filtro del decimoprimer armónico está desintonizado.

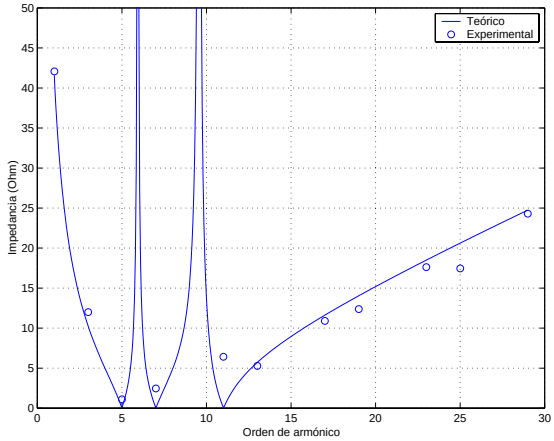
En la Tabla 6.11 se muestran los valores de impedancia de los filtros en función de la frecuencia y la secuencia. Estos valores de impedancia han sido obtenidos mediante la medida de la intensidad absorbida por cada filtro y la tensión existente en sus bornas. En este sentido, dichos valores están supeditados a la existencia de armónicos de intensidad a las frecuencias deseadas.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.26: Comparación de impedancias teóricas y experimentales. (a) Filtros quinto y séptimo armónico. (b) Filtro decimoprimer armónico. (c) Banco de filtros.

Tabla 6.11: Medida de la impedancia de los filtros.

Orden arm.	Sec. arm.	Z_5 (Ω)	Z_7 (Ω)	Z_{11} (Ω)	Z_{total} (Ω)
1	+	$0.52 - j76.62$	$1.31 - j134.10$	$4.23 - j306.60$	$0.36 - j42.07$
3	−	$0.34 - j16.41$	$2.78 - j33.72$	$11.39 - j100.10$	$0.48 - j9.95$
5	−	**1.10+j0.09**	$0.99 + j14.30$	$5.74 + j48.54$	$1.06 + j0.19$
7	+	$1.74 + j11.14$	**2.35-j0.81**	$2.68 - j27.34$	$2.42 - j0.49$
11	−	$8.08 - j26.06$	$6.69 - j15.32$	**6.14+j3.67**	$6.37 - j0.75$
13	+	$9.08 + j35.18$	$4.04 + j21.26$	$6.03 + j5.21$	$3.07 + j4.29$
17	−	$9.25 - j50.30$	$10.88 - j33.31$	$14.62 - j15.86$	$5.22 - j9.59$
19	+	$13.93 + j54.39$	$17.58 + j44.59$	$11.80 + j20.30$	$5.13 + j11.27$
23	−	$16.89 - j65.15$	$19.32 - j45.34$	$25.03 - j37.73$	$7.42 - j15.98$
25	+	$23.30 + j68.76$	$23.53 + j50.81$	$18.05 + j34.35$	$7.28 + j15.86$
29	−	$29.98 - j82.94$	$26.64 - j62.56$	$42.98 - j46.43$	$12.01 - j21.11$

Atendiendo a la Tabla 6.11, al considerar la secuencia positiva de un armónico, si el valor de la parte imaginaria es negativo significa que la carga es capacitiva, si por el contrario dicho valor es positivo, la carga es inductiva. Justo lo contrario ocurre para la secuencia negativa: valores positivos de la parte imaginaria de la impedancia están asociados con cargas capacitivas, mientras que valores negativos con inductivas. En este sentido, fijándose en las impedancias que presentan cada una de las ramas del filtro para las frecuencias a las cuales han sido sintonizados, se puede comprobar que el filtro que debería estar sintonizado al séptimo armónico lo está un poco por encima, pues la impedancia para dicha frecuencia es ligeramente positiva. Idéntica consideración se puede realizar para el filtro sintonizado al decimoprimer armónico, siendo en este caso la desintonización mayor.

Por otra parte, se puede comprobar que la parte resistiva de la impedancia de los distintos filtros aumenta con la frecuencia debido al incremento de las pérdidas en el hierro de las bobinas.

6.5.3 Comparación de resultados teóricos y experimentales

En este apartado se comparan los resultados teóricos con los experimentales para proceder a la validación de los primeros. Además de la comparación de los

Tabla 6.12: Comparación de resultados teóricos y experimentales.

Magnitud	*Teór. simp.*	*Teórico*	*Experimental*
Valor eficaz relativo (p.u.)	0.913	0.908	0.92
THDi relativo (p.u.)	0.687	0.701	0.632
THDu relativo (p.u.)	0.312	0.651	0.631

parámetros globales con los que se ha caracterizado la compensación realizada, valor eficaz de la intensidad y distorsiones de tensión e intensidad referidos a los valores previos a la compensación, se comparan los armónicos inyectados por la carga no lineal y los presentes en la intensidad del sistema.

Dado que en el proceso de optimización utilizado la intensidad de la carga no lineal permanece constante y dicha intensidad experimenta variaciones debidas a la interacción existente entre la carga y el sistema al cual se conecta, se presentan dos tipos de resultados teóricos. El primero de ellos considera la intensidad de la carga no lineal constante y la impedancia teórica que debería presentar el filtro, ya expuestos en la Tabla 6.8. El segundo conjunto de resultados tiene presente la variación de la intensidad absorbida por la carga no lineal y el valor medido de la impedancia del banco de filtros. A partir de este momento, por simplicidad, nombraremos estos conjuntos de resultados por *Teórico simplificado* y *Teórico* respectivamente. Lógicamente, los resultados obtenidos por el segundo método, *Teórico*, al tener en cuenta la interacción red-convertidor, se aproximarán con mayor fidelidad a los resultados experimentales. A continuación se analizan los parámetros más relevantes de la compensación realizada, comparando resultados teóricos y experimentales:

- Parámetros globales de la compensación. La Tabla 6.12 muestra la comparación existente entre los valores teóricos y experimentales para los parámetros globales que avalúan la compensación realizada. El mayor error se está cometiendo en la distorsión relativa de la tensión de la carga para el resultado *Teórico simplificado*, lo cual se debe a que en este cálculo se considera un valor ideal de la impedancia del banco de filtros, siendo su valor nulo para las frecuencias de sintonización de dichos filtros. Por este motivo, la tensión en la carga para los armónicos en los que están sintonizados los filtros es nula y, por tanto, la distorsión de tensión incluye sólo los armónicos no sintonizados, presentando así un valor muy inferior al real.

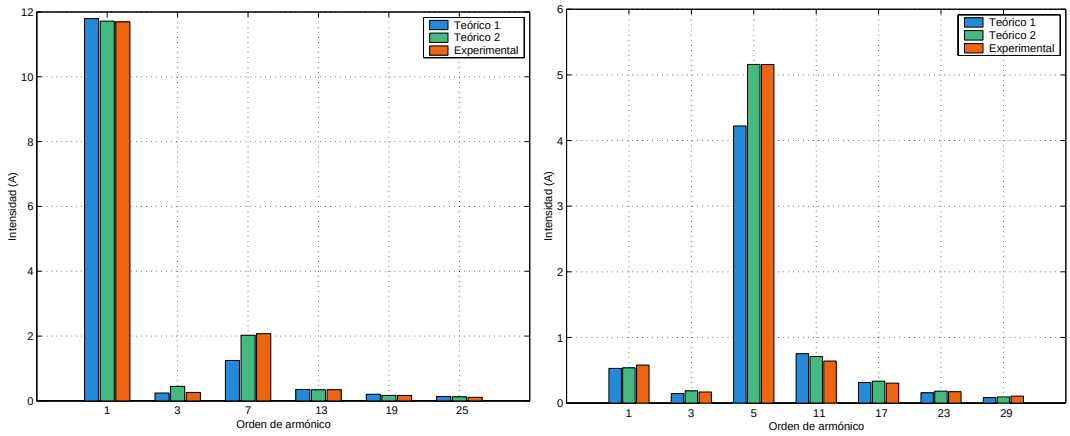


Figura 6.27: Comparación de los armónicos de la intensidad de la carga no lineal. (a) Secuencia positiva. (b) Secuencia negativa.

- Intensidad de la carga no lineal. La comparación de los armónicos más relevantes de la intensidad de la carga no lineal para los dos casos teóricos y el experimental es mostrada en la Figura 6.27 y las tablas 6.13 y 6.14. Los órdenes de armónicos mostrados son los que se han tenido en cuenta para calcular la intensidad del convertidor en el caso de considerar la interacción red-carga no lineal. En el caso *Teórico simplificado*, al ser considerada la intensidad absorbida por la carga no lineal constante, dichos armónicos son los existentes antes de la instalación del filtro. Se puede observar al comparar valores teóricos y experimentales que la variación de la intensidad del convertidor por el hecho de instalar los filtros pasivos se centra en los armónicos quinto y séptimo, mientras que el resto presentan leves variaciones respecto a su valor original. Estas diferencias se justifican por la variación que presentan las tensiones en bornas del convertidor para dichos armónicos por la instalación de los filtros sintonizados. Por otra parte, para el caso *Teórico*, con interacción sistema-carga no lineal, al igual que en el caso de compensación con condensadores previamente analizado, los armónicos resultantes de dicho análisis se adaptan fielmente a los valores experimentales.

- Intensidad del sistema. La Figura 6.28 y las tablas 6.15 y 6.16 comparan los armónicos de intensidad del sistema después de instalar los filtros pasivos. Si bien el primer armónico de intensidad tiene un valor superior a los 20 A, la Figura 6.28 muestra sólo hasta los 2.5 A para poder observar

Tabla 6.13: Comparación de las intensidades de la carga no lineal. Secuencia positiva.

	Teór. simp.		*Teórico*		Experimental	
Orden armónico	Módulo (A)	Fase (rad)	Módulo (A)	Fase (rad)	Módulo (A)	Fase (rad)
1	11.79	-0.22	11.72	-0.23	11.69	-0.22
3	0.24	2.34	0.45	2.05	0.26	2.17
7	1.25	0.68	2.02	0.95	2.07	1.14
13	0.35	-1.06	0.34	-0.67	0.34	-0.33
19	0.21	-2.45	0.17	-2.19	0.17	-1.67
25	0.14	2.63	0.12	2.77	0.11	-2.83

Tabla 6.14: Comparación de las intensidades de la carga no lineal. Secuencia negativa.

	Teór. simp.		*Teórico*		Experimental	
Orden armónico	Módulo (A)	Fase (rad)	Módulo (A)	Fase (rad)	Módulo (A)	Fase (rad)
1	0.53	-2.67	0.53	-2.57	0.58	-2.46
3	0.14	0.73	0.18	0.35	0.17	-0.24
5	4.22	-1.92	5.15	-1.85	5.15	-1.96
11	0.75	-1.23	0.71	-1.31	0.64	-1.55
17	0.31	-0.27	0.33	-0.33	0.3	-0.69
23	0.16	0.88	0.18	0.72	0.17	0.24
29	0.08	2.19	0.09	1.84	0.10	1.20

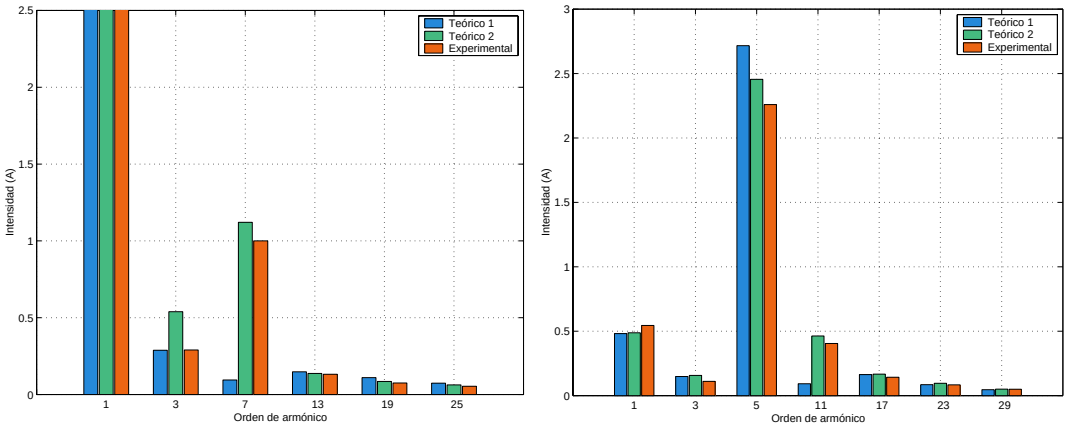


Figura 6.28: Comparación de los armónicos de la intensidad del sistema. (a) Secuencia positiva. (b) Secuencia negativa.

mejor los valores de los armónicos de orden superior. La información referente a este armónico se encuentra en la Tabla 6.15, pudiéndose comprobar la gran similitud entre resultados teóricos y experimentales. Los resultados para la intensidad del sistema muestran una mayor discrepancia que los presentados para el caso de la carga no lineal, sobre todo para los armónicos quinto y séptimo, si bien no son excesivas. Estas desviaciones se deben a errores asociados a las medidas de las impedancias, tanto de los filtros pasivos como de las componentes lineales de la carga y a las pequeñas diferencias de fase existentes entre los valores teóricos y experimentales de los armónicos de intensidad de la carga no lineal. El origen de todos ellos está asociado a errores de medida de tensiones e intensidades, ya sean de los transductores utilizados, como del instrumento virtual desarrollado.

A pesar de este error, la Figura 6.29 muestra la similitud entre las intensidades teórica y experimental para cada una de las fases en el dominio del tiempo. En dicha figura, además de ser patente la semejanza existente entre los valores teóricos y experimentales, se puede observar el cambio que sufre la intensidad debido a la instalación de los filtros sintonizados: no sólo la distorsión de intensidad disminuye, lo cual se refleja en una onda de intensidad más parecida a una senoide, sino que se puede comprobar como la onda se adelanta, manifestándose de esta forma la compensación de potencia reactiva realizada.

Tabla 6.15: Comparación de las intensidades del sistema. Secuencia positiva.

	Teór. simp.		*Teórico*		Experimental	
Orden armónico	Módulo (A)	Fase (rad)	Módulo (A)	Fase (rad)	Módulo (A)	Fase (rad)
1	20.10	-0.03	20.14	-0.03	20.43	-0.02
3	0.29	2.27	0.54	1.97	0.29	2.04
7	0.09	-0.27	1.12	-0.09	1.00	0.07
13	0.15	-1.05	0.14	-1.01	0.13	-0.71
19	0.11	-2.51	0.09	-2.42	0.08	-1.80
25	0.07	2.255	0.06	2.53	0.05	-3.01

Tabla 6.16: Comparación de las intensidades del sistema. Secuencia negativa.

	Teór. simp.		*Teórico*		Experimental	
Orden armónico	Módulo (A)	Fase (rad)	Módulo (A)	Fase (rad)	Módulo (A)	Fase (rad)
1	0.48	-2.52	0.48	-2.39	0.55	-2.41
3	0.15	1.43	0.15	0.84	0.11	-0.44
5	2.72	-2.24	2.45	-1.89	2.26	-1.84
11	0.09	0.91	0.46	-0.51	0.40	-0.72
17	0.16	-0.23	0.17	-0.07	0.14	-0.45
23	0.08	0.96	0.09	0.96	0.08	0.45
29	0.05	2.29	0.05	2.13	0.05	1.44

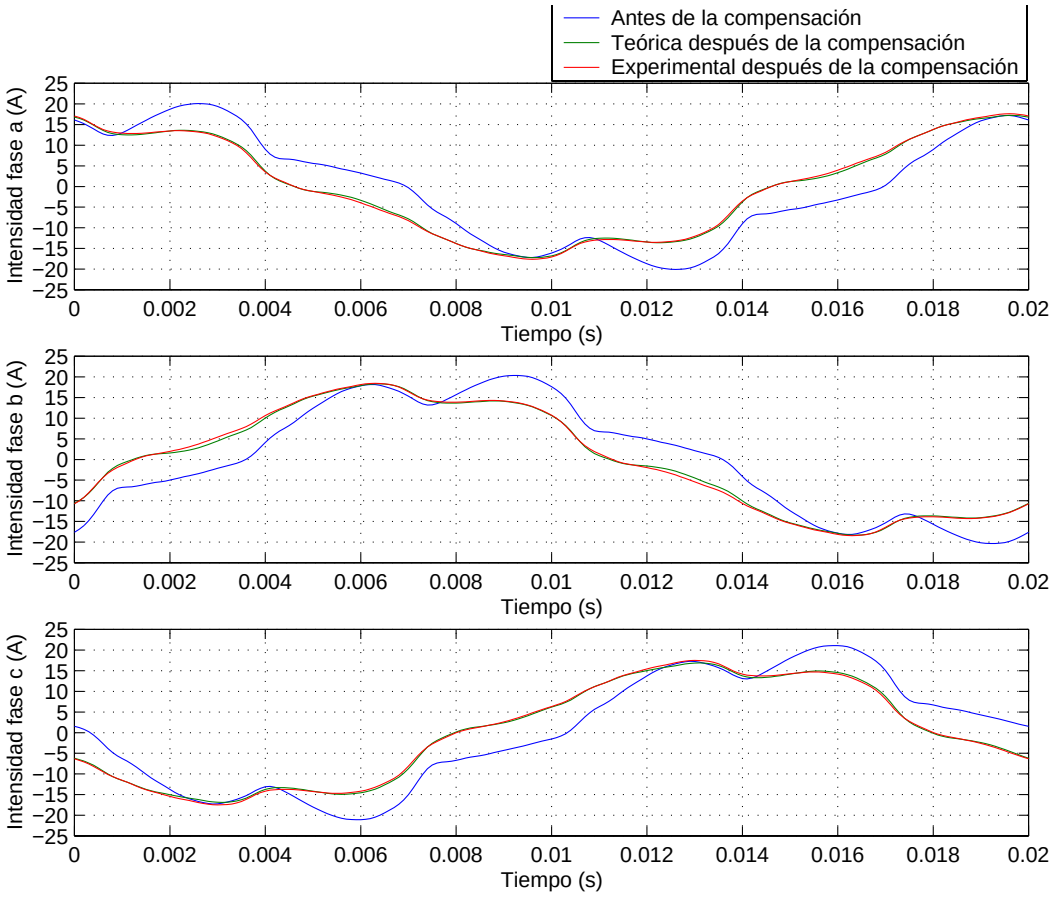


Figura 6.29: Comparación de intensidades teóricas y experimentales antes y después de la compensación.

Tabla 6.17: Evaluación de la compensación realizada.

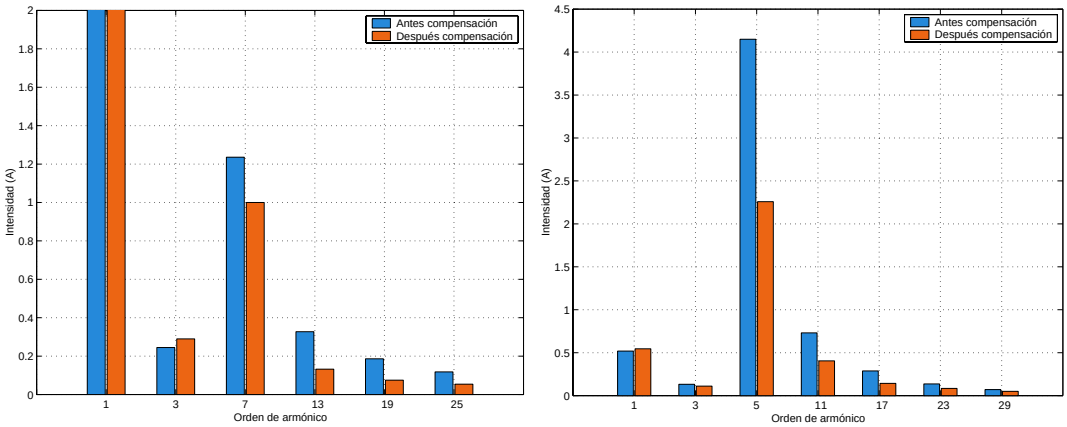
Magnitud	Antes	Después
Reactiva y distorsionante (kVA)	3.87	1.07
Factor de potencia	0.89	0.99
Reactiva fundamental (kVAR)	3.45	-0.2
Factor de potencia fundamental	0.91	0.99
Distorsión de intensidad (%)	20.16	12.75
Distorsión de tensión (%)	2.76	1.74

6.5.4 Evaluación de la compensación

Una vez comprobada la validez de los resultados teóricos, que reproducen con fidelidad los resultados experimentales, se evalúa a partir de los resultados experimentales la compensación realizada. En esta evaluación se tienen en cuenta tanto los aspectos relativos a la compensación de reactiva como a mitigación de armónicos.

La Tabla 6.17 muestra la comparación de los parámetros globales antes y después de efectuarse la compensación. Mediante el filtrado pasivo se consigue la reducción de la reactiva consumida por la instalación industrial, tanto en su formulación clásica como en la aplicada para regímenes no senoidales con cargas no lineales, así como la mitigación de armónicos, reflejada en unas menores tasas de distorsión en tensión e intensidad.

La comparación de las intensidades antes y después de la compensación se representa en la Figura 6.29 en el dominio del tiempo. En dicha figura es patente la reducción de la distorsión y de la potencia reactiva consumida por el conjunto formado por la carga y el compensador pasivo. Esta reducción se pone además de manifiesto cuando se compara el espectro armónico, lo cual se muestra en la Figura 6.30 y en la Tabla 6.18. Tras el análisis de los valores aportados, se comprueba que la reducción más modesta se logra para el séptimo armónico. Este hecho se debe a un doble efecto. Por una parte, se tiene un incremento de este armónico de intensidad generado por la carga no lineal, consecuencia de la instalación de los filtros, tal y como se aprecia en la Figura 6.27. Por otra, el error en la sintonización del filtro para este armónico, provoca que la reducción conseguida sea menor, por el aumento de impedancia que esta desintonización supone. Este efecto de desintonización es claro si se comparan las características de filtrado del quinto y séptimo armónicos. Si bien la intensidad generada por el convertidor para ambos armónicos aumenta



(a) (b)

Figura 6.30: Comparación de resultados experimentales antes y después de la compensación.

a la hora de instalar los filtros, las reducciones para el quinto son superiores debido a la mejor sintonización que el filtro correspondiente presenta.

Por otra parte, es interesante comprobar como los resultados para el decimoprimer armónico son mejores que los que en un principio cabría esperar por la desintonización que presentaba este filtro. Esto se debe a que, si bien el valor de impedancia que presenta el filtro para dicho armónico es muy elevado en comparación con la existente en los armónicos quinto y séptimo, dicho valor es pequeño si se compara con la impedancia del sistema, con la que forma un divisor de intensidad.

6.6 Resumen del capítulo

En el presente capítulo se ha validado de forma experimental el procedimiento teórico de optimización de filtros pasivos desarrollado en el Capítulo 4. Para ello, se ha montado en el laboratorio una red de distribución a escala, en la que una industria, compuesta por cargas lineales y no lineales, se alimenta de una subestación a través de una línea aérea.

Antes de proceder al diseño e instalación del filtro mediante el método propuesto, se ha procedido a realizar la compensación de la potencia reactiva mediante la instalación de distintas baterías de condensadores. Los resultados experimentales de la compensación en estas condiciones, si bien siguen la tendencia descrita por los resultados teóricos (aumento de la distorsión armónica

Tabla 6.18: Comparación de resultados experimentales antes y después de la compensación.

	Secuencia positiva			Secuencia negativa		
Orden armónico	Antes (A)	Después (A)	Reducción (%)	Antes (A)	Después (A)	Reducción (%)
1	22,199	20.433	7.95	0,519	0.545	-5.01
3	0,245	0.290	-18.36	0,132	0.111	15.91
5	0,057	0.269	-37.19	4,149	2.259	45.55
7	1,236	1.000	19.09	0,031	0.055	-77.42
11	0,027	0.016	40.74	0,731	0.405	44.59
13	0,327	0.132	59.63	0,012	0.010	16.66
17	0,014	0.008	42.85	0,288	0.143	50.34
19	0,186	0.075	59.67	0,007	0.006	14.28
23	0,008	0.007	12.50	0,136	0.084	38.23
25	0,118	0.054	54.23	0,005	0.005	0
29	0,005	0.005	0	0,070	0.050	28.57

con el valor de la capacidad del condensador instalado), no se ajustan excesivamente a estos. La causa de esta discrepancia entre ambos resultados se debe a que la intensidad consumida por la carga no lineal, considerada constante en los cálculos teóricos, experimenta variaciones a la hora de instalar los condensadores. Por estos motivos, se hace necesario desarrollar un modelo de la carga no lineal utilizada, expuesto en el Apéndice A, que tenga en cuenta las variaciones de la tensión en bornas de la carga no lineal, origen de las variaciones de la intensidad.

Validado el modelo de la carga no lineal, se ha procedido a dimensionar el filtro pasivo según el método propuesto, en el que la intensidad de la carga no lineal es considerada constante. Una vez determinados los valores del filtro pasivo, se calcula el punto de funcionamiento teniendo presente la interacción red-convertidor con el modelo de carga no lineal desarrollado. Finalmente, se ha evaluado la compensación realizada a partir de los resultados experimentales comparando las situaciones antes y después de la instalación de los filtros.

Por todos estos motivos y teniendo presente la buena coincidencia entre los resultados teóricos y experimentales, se confirma la validez del método propuesto de diseño de filtros pasivos para la compensación de potencia reactiva y mitigación de armónicos.

Capítulo 7

Conclusiones y futuras líneas de investigación

7.1 Resumen y conclusiones

En la presente tesis se ha abordado el problema del diseño óptimo de filtros pasivos para la compensación de reactiva y mitigación de armónicos en instalaciones industriales.

Tras la breve presentación del problema en el capítulo introductorio, en el Capítulo 2 se han revisado los conceptos de potencia reactiva para regímenes senoidales y no senoidales. Se ha puesto de manifiesto que la extensión de la definición clásica de potencia reactiva para los regímenes senoidales a otros no senoidales no es del todo adecuada, dado que la compensación de esta magnitud no conlleva asociado el incremento del factor de potencia. Por otra parte, se ha destacado la relación existente entre la potencia reactiva y los armónicos.

En el Capítulo 3 se ha realizado una revisión bibliográfica tanto de las definiciones más relevantes de potencia reactiva como de los métodos de diseño de filtros pasivos que aparecen en la literatura especializada. Las definiciones de potencia reactiva analizadas se extienden a sistemas monofásicos y trifásicos, dividiéndose en función de su formulación en dos grandes grupos: dominio del tiempo y de la frecuencia. Por otra parte, el análisis de los métodos de diseño de filtros pasivos existentes pone de manifiesto la ausencia de procedimientos sistemáticos de diseño hasta hace relativamente poco tiempo. Además, se incide sobre las carencias que estos últimos métodos tienen en ciertos aspectos de su formulación.

Una vez conocidas y estudiadas tanto las definiciones de potencia reactiva como los distintos métodos de diseño de filtros pasivos, en el Capítulo 4 se

ha presentado una nueva metodología para el diseño de filtros pasivos. Una vez seleccionada la definición de potencia reactiva idónea para sistemas de distribución industriales, se procede a efectuar la formulación del problema. El diseño de los filtros se efectúa bajo el criterio de minimización de la potencia reactiva demandada por la instalación, o lo que es lo mismo, de la componente de intensidad ortogonal a la tensión en la carga. El problema fundamental que se presenta en la minimización de dicha función es su carácter no lineal, lo cual obliga a la utilización de un algoritmo primal-dual de punto interior y barrera logarítmica. En este sentido, las principales aportaciones de la tesis se centran en los siguientes aspectos:

- Resonancias. Se ha podido constatar que las resonancias son las causantes del comportamiento no lineal de la función objetivo planteada. La resonancia para un determinado armónico es una función lineal de la capacidad de los condensadores de los filtros instalados.

- Regiones factibles. El carácter no lineal de la función objetivo implica la multiplicidad de mínimos locales, cada uno de los cuales se encuentra en una región delimitada por los hiperplanos de resonancia. El cálculo de estas regiones en las cuales se localizan los mínimos locales se realiza mediante un proceso sistemático. En este sentido, la solución alcanzada por el algoritmo de minimización siempre es el óptimo global del problema, pues a priori se conocen el número de mínimos locales existentes, al haber sido determinadas las regiones factibles.

- Restricciones adicionales. Mediante la inclusión de las restricciones adicionales se han conseguido dos objetivos:

  - Control total sobre la posición de los puntos de resonancia que se crean en el sistema por la adición de los filtros pasivos. De esta forma, variaciones de los parámetros, tanto de los filtros por envejecimiento, o de la red por reconfiguraciones, no llevan al sistema a situaciones críticas de resonancia.
  - La potencia reactiva en el armónico fundamental no es nunca capacitiva para cumplir de esta forma la normativa vigente.

  Dada la flexibilidad de la formulación propuesta, es fácil la inclusión en el problema de otro tipo de restricciones, aparte de las mencionadas, ya sean de índole técnico, económico o normativo.

En el Capítulo 5 se ha analizado el comportamiento del método de optimización propuesto con una red de distribución concreta. En este sentido se ha estudiado la influencia que los distintos parámetros tienen en el proceso de optimización y cómo estos influyen en el resultado final. La compensación se ha caracterizado mediante el valor eficaz y la distorsión de la intensidad del sistema y la distorsión de tensión de la carga después de la instalación de los filtros. Los parámetros que han sido tenidos en cuenta han sido la distorsión de tensión del sistema, la distorsión de intensidad de la carga y otros como la impedancia de la línea.

El Capítulo 6 se ha dedicado a la validación experimental del método de diseño de filtros pasivos que se ha desarrollado en el Capítulo 4. Para este fin se ha montado en el laboratorio una red de distribución a escala, que corresponde a una instalación industrial que se alimenta de una subestación a través de una línea aérea, en la que la tensión de alimentación y la intensidad demandada por la industria están distorsionadas. A partir de las medidas de impedancias de la red y de la carga, así como de los armónicos de tensión e intensidad se procedió al diseño de un filtro pasivo según el procedimiento desarrollado. El método de diseño propuesto ha sido validado dada la buena concordancia entre los valores experimentales y los resultados teóricos obtenidos empleando el modelo de carga no lineal desarrollado en el Apéndice A y la interacción carga no lineal-red.

En el Apéndice A se ha desarrollado un modelo de un variador de velocidad para un motor de inducción. Dicho modelo se hace necesario para estimar con precisión los armónicos de intensidad demandados por la carga no lineal empleada en el Capítulo 6, como consecuencia de la instalación de los filtros pasivos. En este sentido, se ha desarrollado y validado de forma experimental un modelo en el que las tensiones de alimentación del rectificador de entrada pueden estar distorsionadas y desequilibradas, teniéndose en cuenta los periodos de conmutación. Además, este modelo puede utilizarse en cálculos en los que se tiene presente la interacción entre la red y la carga no lineal, pues además de obtenerse las expresiones analíticas de los armónicos de intensidad, se calculan sus derivadas respecto a las tensiones de alimentación.

7.2 Sugerencias y futuras líneas de investigación

A partir del trabajo desarrollado cabría sugerir las siguientes líneas futuras de investigación:

- En la formulación del proceso de optimización, la intensidad demandada

por las cargas no lineales ha sido considerada constante. Como ha podido comprobarse de forma experimental, las intensidades consumidas por las cargas no lineales depende de la tensión de alimentación existente en sus bornas, que se ve modificada por la adición de los filtros pasivos. Una vez calculado e instalado el filtro pasivo con esta simplificación, se procede a un ajuste del punto de funcionamiento mediante el cálculo de armónicos teniendo en cuenta la interacción red-convertidor. En este sentido, sería de especial interés poder incluir en el proceso de optimización las variaciones de la intensidad de la carga no lineal en función de las capacidades de los filtros pasivos que se instalan.

- Aplicación del método de diseño con otras funciones objetivo. El método de diseño de filtros pasivos desarrollado se basa en la minimización de potencia reactiva. Sin embargo, todas las conclusiones extraídas respecto a las regiones factibles delimitadas por las resonancias que crean los armónicos de tensión en intensidad y las restricciones adicionales para el control de las resonancias que incluyen los filtros instalados y la potencia reactiva del fundamental pueden ser aplicadas a otras funciones objetivo, como distorsión de intensidad y/o distorsión de tensión, costes, etc.

- Extensión de los criterios de diseño a filtros híbridos. Sin duda esta es una de las líneas de investigación más prometedoras dentro del campo de mitigación de armónicos en redes industriales: la conjunción de los filtros pasivos y activos. Por una parte, los filtros pasivos se encargarían de compensar la potencia reactiva y los grandes armónicos presentes en la red. Por otra, el filtro activo se utilizaría para eliminar los armónicos de orden superior de menor importancia. De esta forma, la potencia del filtro activo se reduciría notablemente, consiguiéndose un sistema de filtrado eficiente y económico.

Apéndice A

Modelo de la carga no lineal

A.1 Introducción

En este apéndice se pretende realizar un modelo de la carga no lineal que se utiliza en la validación experimental del proceso de optimización. La carga generadora de armónicos utilizada, cuyo es quema se muestra en la Figura A.1, es un variador de velocidad para motores de corriente alterna con modulación por ancho de pulso (PWM). Dicho accionamiento consta de un rectificador no controlado, un enlace de continua, compuesto por una bobina y un condensador, y un inversor que alimenta el motor, que a su vez acciona un generador cargado con una batería de resistencias. La razón para la realización de este modelo es que, como se ha comprobado de forma experimental, el contenido armónico del variador de velocidad es sensible al valor de las tensiones aplicadas en sus bornas y, por tanto, al valor de la impedancia de vista desde dichos terminales. De esta forma, la introducción de los compensadores de potencia reactiva, ya sean condensadores o filtros sintonizados, están modificando la impedancia Thevenin vista desde el rectificador y, por tanto, el contenido armónico de la carga no lineal. Si bien las variaciones de intensidad no han sido tenidas en cuenta a la hora de optimizar los compensadores de potencia

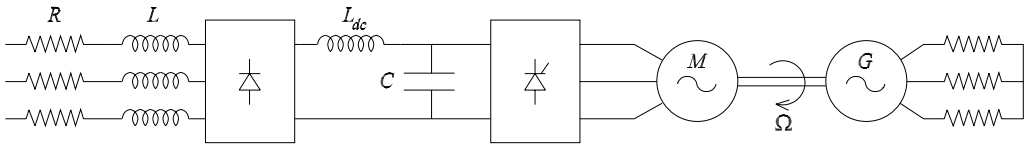


Figura A.1: Esquema del variador de velocidad utilizado

reactiva, este modelo servirá para calcular las nuevas intensidades con éstos instalados y así poder establecer una comparación más precisa de los resultados teóricos y experimentales.

A.2 Simplificaciones del modelo

En este modelo de variador de velocidad se está interesado únicamente en conocer las intensidades de entrada al rectificador no controlado, careciendo de interés otros aspectos del accionamiento, por lo que se han realizado las siguientes simplificaciones:

- Desde la red el accionamiento se ve como un rectificador no controlado que alimenta un enlace de continua, formado por una bobina y un condensador, del que el inversor está demandando una potencia, que será función tanto de la velocidad del motor como del par resistente que esté ofreciendo el generador. Entonces, el conjunto inversor-motor-generador, puede ser sustituido por una resistencia que está demandando la misma potencia, como puede verse en la Figura A.2.(a).

- Normalmente, el valor de la capacidad de los condensadores que se disponen en el lado de continua de los accionamientos de alterna es elevado, para que la tensión a la entrada del inversor sea lo más constante posible y así obtener una tensión en bornas del motor cercana a senoidal. Por este motivo, la tensión del condensador puede suponerse constante, a pesar de tener un rizado superpuesto, función de la frecuencia de trabajo y la carga del inversor, que en primera aproximación puede ser despreciado, obteniéndose el circuito que se muestra en la Figura A.2.(b).

- De esta forma, al sustituir el condensador por una fuente de tensión continua, la consideración de la resistencia que representa al conjunto inversor-motor-generador no es necesaria para la determinación de las intensidades de entrada del rectificador, pues queda en paralelo con dicha fuente, como se observa en la Figura A.2.(c).

- Una vez suprimida la resistencia, el valor de la tensión de la fuente de continua determinará la potencia que está absorbiendo el accionamiento.

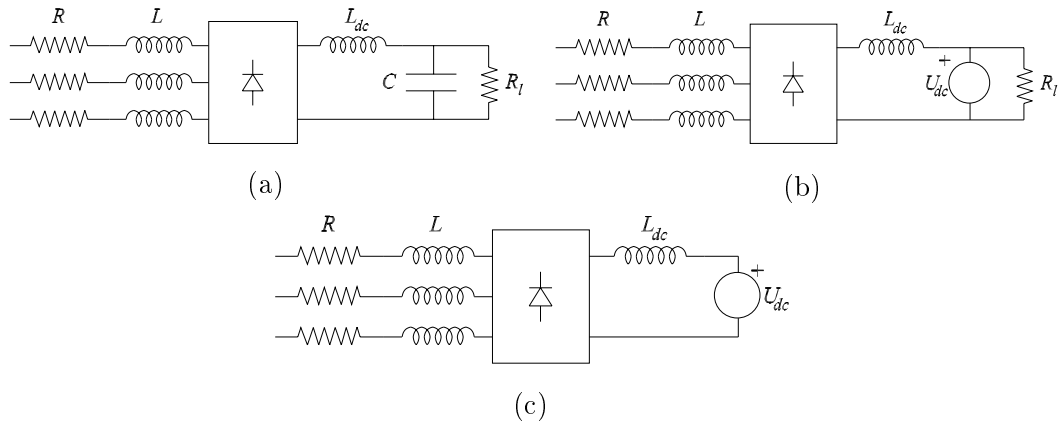


Figura A.2: Simplificaciones del modelo. (a) Carga desde el enlace de continua. (b) Tensión del condensador constante. (c) Modelo simplificado final.

A.3 Análisis de los modos de funcionamiento del rectificador

En esta sección se obtendrán las ecuaciones fundamentales de la intensidad en el dominio del tiempo. Dado que el modelo que se desarrolla tiene que validarse con unos resultados experimentales, éste ha de ser lo más general posible, por lo que las tensiones de alimentación se suponen periódicas, no senoidales y con desequilibrio:

$$u_a(t) = \sqrt{2}\sum_k U_{ak}\,\mathrm{sin}(k\omega t + \alpha_{ak}) \tag{A.1}$$

$$u_b(t) = \sqrt{2}\sum_k U_{bk}\,\mathrm{sin}(k\omega t + \alpha_{bk} - 2\pi/3) \tag{A.2}$$

$$u_c(t) = \sqrt{2}\sum_k U_{ck}\,\mathrm{sin}(k\omega t + \alpha_{ck} + 2\pi/3) \tag{A.3}$$

Dichas tensiones pueden expresarse en función de los armónicos de tensión del vector de Park. Si $\boldsymbol{u}(t)$ es el vector de Park asociado al sistema trifásico de tensiones definido se puede escribir:

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{U}_k e^{jk\omega t} \tag{A.4}$$

Los índices positivos están asociados con la secuencia positiva del armónico *k-esimo*, mientras que los negativos corresponden al conjugado de la secuencia

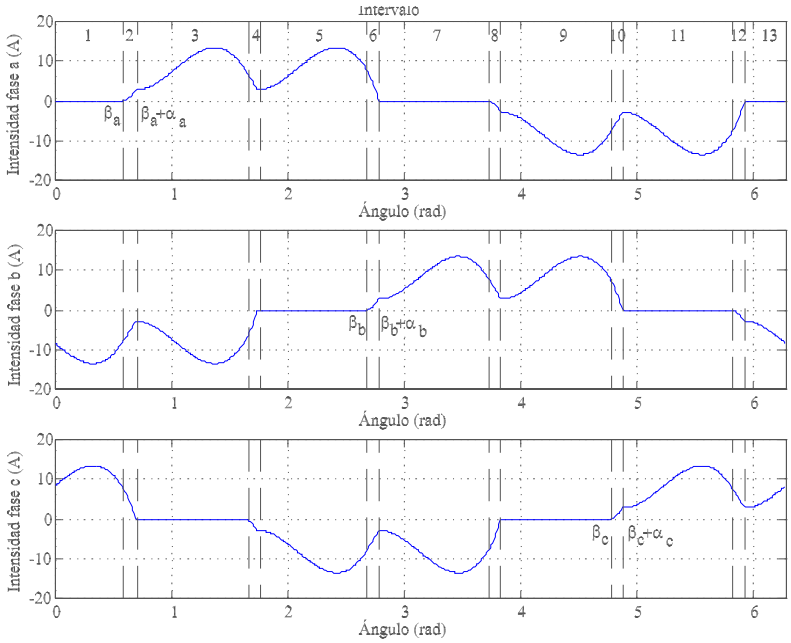


Figura A.3: Intensidades demandadas por el rectificador no controlado.

negativa para dicho armónico. De esta forma, y mediante la matriz de transformación de coordenadas, es posible expresar las tensiones trifásicas anteriores en función de los fasores $\boldsymbol{U}_k$ de la siguiente forma:

$$u_a(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_k U_k \sin(k\omega t + \alpha_k) \tag{A.5}$$

$$u_b(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_k U_k \sin(k\omega t + \alpha_k - 2\pi/3) \tag{A.6}$$

$$u_c(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_k U_k \sin(k\omega t + \alpha_k + 2\pi/3) \tag{A.7}$$

donde U_k y α_k son el módulo y el argumento del fasor $\boldsymbol{U}_k$, y el índice k de los sumatorios se extiende tanto a números positivos como negativos.

Se presentan tres estados posibles de funcionamiento para cada una de las fases dependiendo de la tensión ánodo-cátodo que tengan los diodos del puente en cada instante: conducción, corte y conmutación. A continuación, se analiza un semiciclo positivo de la onda de intensidad de la fase a mostrada en la Figura A.3:

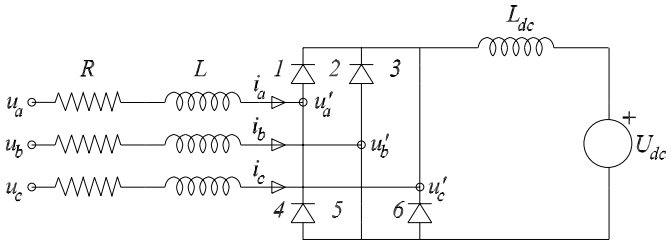


Figura A.4: Intervalo 1. Conducción fases b y c.

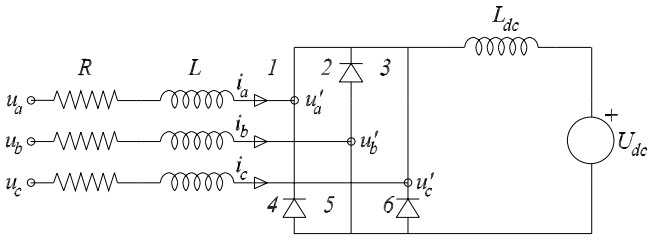


Figura A.5: Intervalo 2. Conmutación fases a y c.

- Intervalo 1: $t \in [0, \beta_a]$. En este periodo, representado en la Figura A.4, conducen las fases b y c siendo la intensidad $i_a(t)$ nula, pues la tensión ánodo-cátodo del diodo 1 es negativa:

$$i_a^{(1)}(t) = 0 \tag{A.8}$$

  El final de este periodo se alcanza cuando dicha tensión se hace cero, que, cuando la tensión de alimentación es senoidal y equilibrada, coincide con el ángulo $\pi/6$.

- Intervalo 2: $t \in [\beta_a, \beta_a + \alpha_a]$. Ahora la tensión de línea $u_{a'c'}$ polariza directamente el diodo 1 y comienza a conducir. Debido a la presencia de las bobinas en el lado de alterna, la intensidad de la fase c no puede variar instantáneamente y comienza la conmutación entre ambas fases. El circuito que se obtiene se representa en la Figura A.5. Tras el análisis de dicho circuito se pueden plantear las siguientes ecuaciones para el cálculo de la intensidad en este periodo de funcionamiento:

$$u_{ac} = R(i_a - i_c) + L\frac{d(i_a - i_c)}{dt} \tag{A.9}$$

$$u_{ab} = R(i_a - i_b) + L\frac{d(i_a - i_b)}{dt} + L_{dc}\frac{di_a}{dt} + U_{dc} \tag{A.10}$$

$$i_a + i_b + i_c = 0 \tag{A.11}$$

La ecuación diferencial que gobierna la intensidad de la fase a se obtiene de las anteriores:

$$(3L + L_{dc})\frac{di_a}{dt} + 3Ri_a = 3u_a - U_{dc} \tag{A.12}$$

La solución de la ecuación (A.12) consta de un término correspondiente a un transitorio de primer orden más otro de régimen permanente:

$$i_a^{(2)}(t) = K_1 e^{\frac{-3R}{3L+L_{dc}}t} + \sqrt{6}\sum_k \frac{\sum_k U_k \sin(k\omega t + \alpha_k - \varphi_k)}{Z_k} - \frac{U_{dc}}{3R} \tag{A.13}$$

donde Z_k es el módulo de la impedancia total para el armónico *k-esimo*, incluyendo el lado de alterna más continua, y φ_k es la fase de dicha impedancia. La constante de integración K_1 se determina en función de las condiciones iniciales del intervalo que serán detalladas en la siguiente sección.

Este intervalo finaliza cuando la intensidad i_c alcance un valor nulo, lo cual se produce en un ángulo α_a a partir del inicio de la conducción, que no es conocido a priori. El análisis de la duración de este periodo se realizará en la siguiente sección junto con la determinación de las constantes de integración.

- Intervalo 3: $t \in [\beta_a + \alpha_a, \beta_c]$. Una vez finalizada la conmutación entre las fases a y c, las fases a y b conducen siguiendo el circuito de la Figura A.6.
  Tras el análisis de este circuito se puede plantear la siguiente ecuación para la intensidad:

$$(2L + L_{dc})\frac{di_a}{dt} + 2Ri_a = u_{ab} - U_{dc} \tag{A.14}$$

$$i_a^{(3)}(t) = K_2 e^{\frac{-2R}{2L+L_{dc}}t} + \sqrt{2}\sum_k \frac{\sum_k U_k \sin(k\omega t + \alpha_k - \varphi_k + \pi/6)}{Z_k} - \frac{U_{dc}}{2R} \tag{A.15}$$

  Hay que tener en cuenta que los valores de la impedancia Z_k y el ángulo φ_k han variado respecto al intervalo anterior, pues ahora contiene sólo

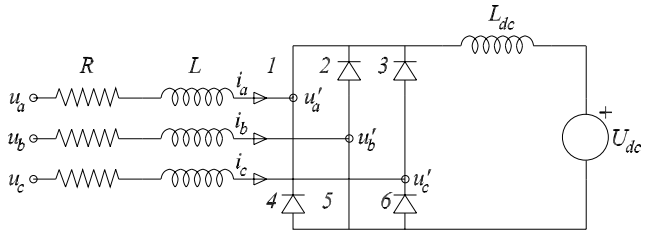


Figura A.6: Intervalo 3. Conducción fases a y b.

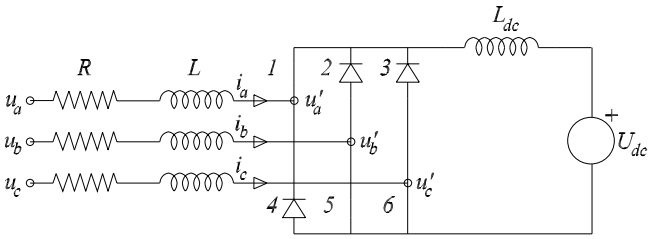


Figura A.7: Intervalo 4. Conmutación fases b y c.

dos veces a la impedancia de la línea, mientras que en el caso anterior lo eran tres. La constante de integración K_2 será determinada en función de las condiciones iniciales del intervalo.

- Intervalo 4: $t \in [\beta_c, \beta_c + \alpha_c]$. En este periodo aparece la conmutación de las fases b y c dado que la tensión ánodo-cátodo del diodo 6 se hace positiva, obteniéndose el circuito de la Figura A.7. La ecuación de funcionamiento y su solución para este intervalo son las siguientes:

$$(3L + 2L_{dc})\frac{di_a}{dt} + 3Ri_a = 3u_a - 2U_{dc} \tag{A.16}$$

$$i_a^{(4)}(t) = K_3 e^{\frac{-3R}{3L+2L_{dc}}t} + \sqrt{6}\sum_k \frac{\sum_k U_k \sin(k\omega t + \alpha_k - \varphi_k)}{Z_k} - \frac{2U_{dc}}{3R} \tag{A.17}$$

- Intervalo 5: $t \in [\beta_c + \alpha_c, \beta_b]$. Una vez finalizada la conmutación de las fases b y c, la conducción se establece ahora entre las fases a y c, tal y como se muestra en la Figura A.8. Las ecuaciones son idénticas a las obtenidas en el Intervalo 3, cambiando las fase b por la c, por lo que las ecuaciones toman la siguiente forma:

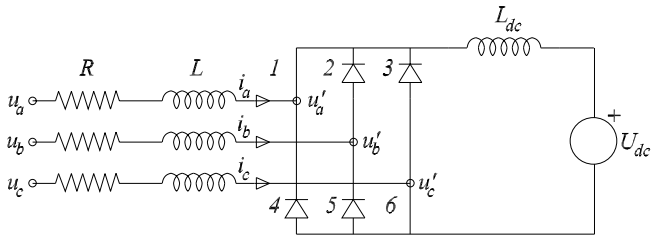


Figura A.8: Intervalo 5. Conducción fases a y b.

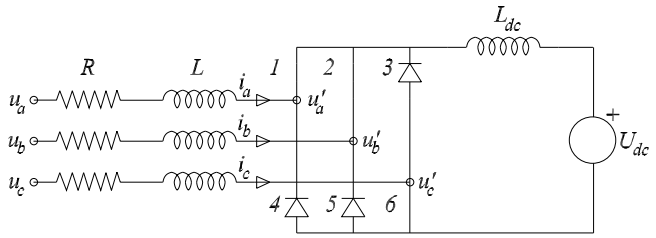


Figura A.9: Intervalo 6. Conmutación fases a y b.

$$(2L + L_{dc})\frac{di_a}{dt} + 2Ri_a = u_{ac} - U_{dc} \tag{A.18}$$

$$i_a^{(5)}(t) = K_4 e^{\frac{-2R}{2L+L_{dc}}t} - \sqrt{2}\sum_k \frac{\sum_k U_k \sin(k\omega t + \alpha_k - \varphi_k + 5\pi/6)}{Z_k} - \frac{U_{dc}}{2R} \tag{A.19}$$

Tal y como se comentará en la sección posterior, ya sea régimen de funcionamiento con tensiones equilibradas o no, no es necesario calcular explícitamente este periodo de funcionamiento, pues la constante K_4 puede hallarse a partir de otras variables que han sido ya previamente calculadas.

- Intervalo 6: $t \in [\beta_b, \beta_b + \alpha_b]$. En este periodo el diodo 2 comienza a conducir, iniciándose la conmutación entre las fases a y b. Las ecuaciones resultantes al resolver el circuito de la Figura A.9 son idénticas a las del Intervalo 1, cambiando sólo la condición inicial:

$$(3L + L_{dc})\frac{di_a}{dt} + 3Ri_a = 3u_a - U_{dc} \tag{A.20}$$

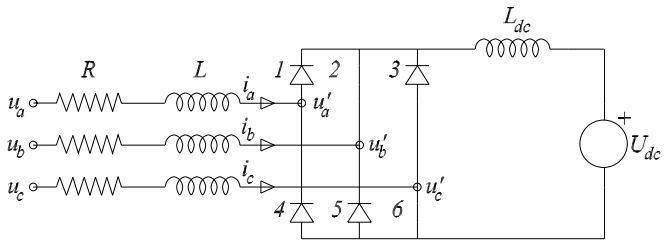


Figura A.10: Intervalo 7. Conducción fases b y c.

$$i_a^{(6)}(t) = K_5 e^{\frac{-3R}{3L+L_{dc}}t} + \sqrt{2}\sum_k \frac{\sqrt{3}\sum_k U_k \sin(k\omega t + \alpha_k - \varphi_k)}{Z_k} - \frac{U_{dc}}{3R} \tag{A.21}$$

- Intervalo 7: $t \in [\beta_b + \alpha_b, \beta_a + \pi]$. Una vez terminada la conmutación entre las fases ay b, el diodo 1 se corta, y comienza la conducción entre las fases b y c, siendo el circuito de este periodo el que se muestra en la Figura A.10:

$$i_a^{(7)}(t) = 0 \tag{A.22}$$

A.4 Cálculo de los instantes de conducción

Para calcular las constantes de integración resultantes de las ecuaciones anteriores, es necesario resolver una serie de ecuaciones, condiciones de contorno, que fijan el valor de la intensidad al inicio de cada intervalo. En este apartado se analizan las ecuaciones que determinan el ángulo de inicio de cada uno de los intervalos analizados. A priori, sólo puede calcularse el inicio de los intervalos 2, 4 y 6 caracterizados anteriormente, ya que los intervalos 1, 3, 5 y 7 dependen de los tiempos de conmutación que son desconocidos. Así, para la fase a se tiene:

- Intervalo 2. El diodo 1 de la Figura A.4, empezará a conducir cuando la tension $u_{a'c'}$ sea positiva. Dicha tensión puede expresarse en función de las tensiones de línea y de las impedancias del sistema:

$$u_{a'c'}(t) = u_{ac}(t) + u_{cc'}(t) = u_{ac}(t) + L\frac{di_c}{dt} + Ri_c = 0 \tag{A.23}$$

- Intervalo 4. Para que comience este intervalo, por la Figura A.6, la tensión que tiene que ser positiva es $u_{c'b'}$:

$$u_{c'b'}(t) = u_{cb}(t) + u_{bb'}(t) = u_{bc}(t) + L\frac{di_b}{dt} + Ri_b = 0 \tag{A.24}$$

- Intervalo 6. De igual forma que en los casos anteriores, y según puede comprobarse en la Figura A.8, la ecuación que hay que igualar a cero es $u_{b'a'}$:

$$u_{b'a'}(t) = u_{ba}(t) + u_{aa'}(t) = u_{ba}(t) + L\frac{di_a}{dt} + Ri_a = 0 \tag{A.25}$$

Estas ecuaciones no lineales se resuelven mediante la aplicación de un método numérico como Newton-Raphson.

A.5 Aplicación de las condiciones de contorno

Analizados los diferentes estados de funcionamiento en el semiperiodo positivo de la intensidad $i_a(t)$ y el inicio de cada una de los intervalos, quedan por determinar las constantes de integración consideradas, que son función de los valores iniciales que toma la intensidad en cada uno de ellos. Estas condiciones de contorno dependen de si la tensión de alimentación es equilibrada o no. Las siguientes secciones determinan las condiciones de contorno que se deben satisfacer para estos dos tipos de tensiones.

A.5.0.1 Tensiones equilibradas

Si la tensión de alimentación es equilibrada, las intensidades que demanda el inversor son también equilibradas si se suponen condiciones ideales para los diodos del rectificador e impedancias de entrada iguales para cada una de las fases. De esta forma, las intensidades en las tres fases son exactamente iguales pero desplazadas un cierto ángulo:

$$i_a(\omega t) = i_b(\omega t - \frac{2\pi}{3}) = i_c(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \tag{A.26}$$

En este caso, las condiciones de contorno se simplifican notablemente por la simetría existente. Para establecer las condiciones se utilizará la Figura A.3 y la intensidad i_a:

- Inicio del Intervalo 2. La intensidad al inicio del intervalo es nula. De esta condición se extrae el valor de la constante K_1:

$$i_a^{(2)}(\beta_a) = 0 \tag{A.27}$$

- Igualdad de las intensidades al inicio del Intervalo 3 y final del Intervalo 2. Esta condición aparece cuando finaliza la conmutación del diodo 1 de la Figura A.4, un ángulo α_a después del inicio de su conducción en el ángulo β_a:

$$i_a^{(2)}(\beta_a + \alpha_a) = i_a^{(3)}(\beta_a + \alpha_a) \tag{A.28}$$

  Este ángulo de conmutación, α_a es en principio desconocido al igual que la constante K_2.

- Igualdad de las intensidades al inicio del Intervalo 4 y final del Intervalo 3. Esta condición aparece cuando termina el primer periodo de conducción del diodo 1, justo en el instante en que el diodo 6 de la fase c empieza a conducir para conmutar con el diodo 5 de la fase b. De esta forma, se tiene una ecuación función de las constantes K_2 y K_3, dado que el ángulo β_c se conoce a priori:

$$i_a^{(3)}(\beta_c) = i_a^{(4)}(\beta_c) \tag{A.29}$$

- Igualdad de las intensidades al final del Intervalo 4 con el final del Intervalo 2. Esta condición es consecuencia de la alimentación con tensiones equilibradas. En efecto, el Intervalo 4 de la fase a corresponde a la conmutación de las fases b y c. Por la ecuación (A.26), dicha conmutación debe ser igual para las fases b y c, lo cual tiene como consecuencia que tanto el tiempo de conmutación como la intensidad final del intervalo son idénticos para cada una de las fases. Como consecuencia, esta condición establece una ecuación en función del ángulo α_a desconocido y de las constantes K_2 y K_3:

$$i_a^{(4)}(\beta_c + \alpha_a) = i_a^{(2)}(\beta_a + \alpha_a) \tag{A.30}$$

Las incógnitas de las tres ecuaciones planteadas, (A.28)-(A.30), son el intervalo de conmutación α_a y las constantes K_2 y K_3, por lo que se tiene cerrado el problema.

Una vez resuelto, se pueden calcular el resto de los intervalos a partir de las constantes calculadas. Para el Intervalo 5, basta con calcular la constante K_4, que se puede expresar en función de K_2 debido a la simetría:

$$K_4 = K_2 e^{\frac{-2R}{2L+L_{dc}}\frac{\pi}{3}} \tag{A.31}$$

Por otra parte, el Intervalo 6 se calcula a partir de las intensidades de las fases b y c para dicho intervalo. Estas intensidades se pueden obtener en función de las intensidades calculadas para los intervalos 2 y 4 de la fase a, respectivamente, según puede apreciarse en la Figura A.3:

$$i_b(\omega t) = i_a^{(2)}(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \tag{A.32}$$

$$i_c(\omega t) = -i_a^{(4)}(\omega t + \frac{4\pi}{3}) \tag{A.33}$$

Es de destacar en este punto que la determinación de este intervalo de funcionamiento, Intervalo 6, no puede hacerse de la misma forma en la que se obtuvo el Intervalo 5, ésto es, mediante el cálculo de la constante de integración. Este hecho se debe a que las intensidades de las fases b y c tienen constantes de tiempo diferentes para este intervalo. Otra forma de proceder menos costosa es calcular la constante de integración K_5, a partir de la condición inicial del Intervalo 6:

$$i_a^{(5)}(\beta_b) = i_a^{(6)}(\beta_b) \tag{A.34}$$

A.5.0.2 Tensiones desequilibradas

En este caso, las intensidades de cada fase no cumplen la ecuación (A.26), por lo que es necesario resolver un sistema de ecuaciones de mayor dimensión. Como consecuencia del desequilibrio de tensiones los intervalos de conmutación no son ahora iguales en las tres fases. Sin embargo, el sistema de ecuaciones que se plantea para determinar las constantes e intervalos de conmutación sigue el patrón definido anteriormente. Si en el caso equilibrado se resolvió un sistema de tres ecuaciones para la determinación de las constantes, al analizar el caso desequilibrado aparecerán nueve ecuaciones a resolver, cuyas incógnitas serán los intervalos de conmutación de cada una de las fases (α_a, α_b, α_c) y las constantes de integración (K_2^a, K_3^a, K_2^b, K_3^b, K_2^c, K_3^c).

Las ecuaciones (A.27), (A.28) y (A.29)se plantearán de forma idéntica para cada una de las fases, mientras que la ecuación (A.30) igualará las intensidades de distintas fases. Con todo esto el sistema a resolver estará formado por las siguientes ecuaciones:

$$i_a^{(2)}(\beta_a + \alpha_a) = i_a^{(3)}(\beta_a + \alpha_a) \tag{A.35}$$

$$i_a^{(3)}(\beta_c) = i_a^{(4)}(\beta_c) \tag{A.36}$$

$$i_a^{(2)}(\beta_a + \alpha_a) = i_b^{(4)}(\beta_a + \alpha_a + \pi) \tag{A.37}$$

$$i_b^{(2)}(\beta_b+\alpha_b) = i_b^{(3)}(\beta_b+\alpha_b) \tag{A.38}$$
$$i_b^{(3)}(\beta_a+\pi) = i_b^{(4)}(\beta_a+\pi) \tag{A.39}$$
$$i_b^{(2)}(\beta_b+\alpha_b) = i_c^{(4)}(\beta_b+\alpha_b+\pi) \tag{A.40}$$

$$i_c^{(2)}(\beta_c+\alpha_c) = i_c^{(3)}(\beta_c+\alpha_c) \tag{A.41}$$
$$i_c^{(3)}(\beta_b+\pi) = i_c^{(4)}(\beta_b+\pi) \tag{A.42}$$
$$i_c^{(2)}(\beta_c+\alpha_c) = i_a^{(4)}(\beta_c+\alpha_c-\pi) \tag{A.43}$$

A.6 Ajuste de la tension del condensador

Con las simplificaciones realizadas en el modelo que se muestra en la Figura A.2.(c), la intensidad que demanda el rectificador es una función que depende de la tensión del condensador del enlace de continua, supuesta constante. En este sentido, para una alimentación e impedancias de conmutación dadas, la tensión del enlace de continua establece el punto de funcionamiento del inversor. Otra opción más común para fijar el punto de funcionamiento es utilizar la potencia activa que el variador de velocidad está demandando de la red. En este caso la tensión del condensador queda como incógnita junto con los intervalos de conmutación y las constantes de integración. Es necesario, por tanto, añadir a las ecuaciones planteadas la restricción de potencia para igualar así el número de ecuaciones e incógnitas. Dicha ecuación toma las siguientes expresiones dependiendo de si la alimentación del rectificador es equilibrada o no:

- Alimentación equilibrada

$$P = \frac{6U_{dc}}{2\pi}\left\{\int_{\beta_a+\alpha_a}^{\beta_c-\pi} i_a^{(3)}d\omega t + \int_{\beta_c}^{\beta_c+\alpha_a-\pi} i_a^{(4)}d\omega t\right\} \tag{A.44}$$

- Alimentación desequilibrada

$$\begin{aligned} P = \frac{3U_{dc}}{2\pi}\Bigg\{ & \int_{\beta_a+\alpha_a}^{\beta_c-\pi} i_a^{(3)}d\omega t + \int_{\beta_c-\pi}^{\beta_c+\alpha_c-\pi} i_a^{(4)}d\omega t + \\ & + \int_{\beta_b+\alpha_b}^{\beta_c} i_b^{(3)}d\omega t + \int_{\beta_a+\pi}^{\beta_a+\alpha_a+\pi} i_b^{(4)}d\omega t + \\ & + \int_{\beta_c+\alpha_c}^{\beta_b+\pi} i_c^{(3)}d\omega t + \int_{\beta_b+\pi}^{\beta_b+\alpha_b+\pi} i_c^{(4)}d\omega t\Bigg\} \end{aligned} \tag{A.45}$$

A.7 Cálculo de los armónicos de intensidad

La resolución de las ecuaciones (A.27)-(A.30) para el caso equilibrado o (A.35)-(A.43) para el desequilibrado proporcionan las constantes necesarias para la determinación de las intensidades demandadas por el rectificador de entrada del variador de velocidad, expresadas en el dominio del tiempo. A partir de dichas intensidades pueden calcularse los armónicos del vector de Park asociado. Si bien dichos armónicos pueden ser calculados una vez que las intensidades se han reconstruido en el dominio del tiempo aplicando la transformada rápida de Fourier (FFT), es interesante obtener las expresiones matemáticas de estos armónicos. De esta forma, el modelo podrá ser utilizado en análisis de armónicos en redes eléctricas teniendo en cuenta la interacción existente entre la red y el convertidor, tal y como se realiza en el Capítulo 6, [36], [78]. Una vez determinadas las expresiones que proporcionan los armónicos de la intensidad, también es necesario realizar el cálculo de las derivadas de los mismos respecto al módulo y fase de las tensiones de alimentación, en bornas de la inductancia de conmutación, pues se requieren para resolver el problema de interacción armónica.

Según puede comprobarse de las ecuaciones (A.8)-(A.22), las intensidades en cada uno de los periodos está compuesta por un término exponencial, un término de continua y un sumatorio que contiene a los armónicos de tensión considerados en el análisis. De esta forma, una expresión general de la intensidad de una fase x para un determinado periodo de funcionamiento i es la siguiente [36]:

$$i_x^{(i)} = A_{xi} e^{-t/\tau_{xi}} + \sqrt{2} \sum_k \frac{U_{kxi} \sin(k\omega t + \alpha_{kxi} - \varphi_{kxi})}{Z_{kxi}} - B_{xi} U_{dc} \qquad \text{(A.46)}$$

Los valores de las constantes A_{xi}, τ_{xi}, U_{kxi}, Z_{kxi} y B_{xi} se resumen en las tablas A.1 y A.2 para los trece intervalos de funcionamiento que componen un periodo de la intensidad. El valor del ángulo de la impedancia φ_{kxi} se puede obtener a partir del valor de Z_{kxi}. Los valores U_{kxi} y α_{kxi} son los correspondientes a la tensión que se especifica en dichas tablas.

La intensidad en el dominio de Park puede ser expresada en función de las intensidades de las fases a y b:

$$\boldsymbol{i}(t) = \frac{\sqrt{3} + j}{\sqrt{2}} i_a(t) + j\sqrt{2} i_b(t) \qquad \text{(A.47)}$$

El armónico *k-esimo*, $\boldsymbol{I}_k$, de esta intensidad se puede calcular mediante la

Tabla A.1: Constantes de la intensidad $i_a(t)$

Intervalo	A_{ai}	τ_{ai}	α_{axi}	Tensión	B_{ai}
1	-	-	-	-	-
2	K_a^1	$\frac{3L+Ldc}{3R}$	$3u_a$	$3Z+Zdc$	$\frac{1}{3R}$
3	K_a^2	$\frac{2L+Ldc}{2R}$	u_{ab}	$2Z+Zdc$	$\frac{1}{2R}$
4	K_a^3	$\frac{3L+2Ldc}{3R}$	$3u_a$	$3Z+2Zdc$	$\frac{2}{3R}$
5	$K_c^2 e^{\frac{-2R\pi}{(2L+Ldc)\omega}}$	$\frac{2L+Ldc}{2R}$	u_{ac}	$3Z+Zdc$	$\frac{1}{2R}$
6	K_a^5	$\frac{3L+Ldc}{3R}$	$3u_a$	$2Z+Zdc$	$\frac{1}{3R}$
7	-	-	-	-	-
8	$-K_a^1 e^{\frac{3R\pi}{(3L+Ldc)\omega}}$	$\frac{3L+Ldc}{3R}$	$3u_a$	$3Z+Zdc$	$-\frac{1}{3R}$
9	$-K_a^2 e^{\frac{2R\pi}{(2L+Ldc)\omega}}$	$\frac{2L+Ldc}{2R}$	$3u_{ab}$	$2Z+Zdc$	$-\frac{1}{2R}$
10	$-K_a^3 e^{\frac{3R\pi}{(3L+2Ldc)\omega}}$	$\frac{3L+2Ldc}{3R}$	$3u_a$	$3Z+2Zdc$	$-\frac{2}{3R}$
11	$-K_c^2$	$\frac{2L+Ldc}{2R}$	$3u_{ac}$	$2Z+Zdc$	$-\frac{1}{2R}$
12	$-K_a^5 e^{\frac{3R\pi}{(3L+Ldc)\omega}}$	$\frac{3L+Ldc}{3R}$	$3u_a$	$3Z+Zdc$	$-\frac{1}{3R}$
13	-	-	-	-	-

Tabla A.2: Constantes de la intensidad $i_b(t)$

Intervalo	A_{bi}	τ_{bi}	Tensión	Z_{bxi}	B_{bi}
1	$-K_b^2 e^{\frac{-2R\pi}{(2L+Ldc)\omega}}$	$\frac{2L+Ldc}{2R}$	u_{bc}	$2Z+Zdc$	$-\frac{1}{2R}$
2	$-K_b^3 e^{\frac{-3R\pi}{(3L+2Ldc)\omega}}$	$\frac{3L+2Ldc}{3R}$	$3u_b$	$3Z+2Zdc$	$-\frac{2}{3R}$
3	$-K_a^2$	$\frac{2L+Ldc}{2R}$	u_{ba}	$2Z+Zdc$	$-\frac{1}{2R}$
4	$-K_b^5 e^{\frac{-3R\pi}{(3L+Ldc)\omega}}$	$\frac{3L+Ldc}{3R}$	$3u_b$	$3Z+Zdc$	$-\frac{1}{3R}$
5	-	-	-	-	-
6	K_b^1	$\frac{3L+Ldc}{3R}$	$3u_b$	$3Z+Zdc$	$\frac{1}{3R}$
7	K_b^2	$\frac{2L+Ldc}{2R}$	u_{bc}	$2Z+Zdc$	$\frac{1}{2R}$
8	K_b^3	$\frac{3L+2Ldc}{3R}$	$3u_b$	$3Z+2Zdc$	$\frac{2}{3R}$
9	$K_a^2 e^{\frac{2R\pi}{(2L+Ldc)\omega}}$	$\frac{2L+Ldc}{2R}$	u_{ba}	$2Z+Zdc$	$\frac{1}{2R}$
10	K_b^5	$\frac{3L+Ldc}{3R}$	$3u_b$	$3Z+Zdc$	$\frac{1}{3R}$
11	-	-		-	-
12	$-K_b^1 e^{\frac{3R\pi}{(3L+Ldc)\omega}}$	$\frac{3L+Ldc}{3R}$	$3u_b$	$3Z+Zdc$	$-\frac{1}{3R}$
13	$-K_b^2 e^{\frac{2R\pi}{(2L+Ldc)\omega}}$	$\frac{2L+Ldc}{2R}$	u_{bc}	$2Z+Zdc$	$-\frac{1}{2R}$

expresión:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}_k &= \frac{j}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{i}(t)e^{-jk\omega t}d\omega t = \\ &= \frac{-1+j\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} i_a(t)e^{-jk\omega t}d\omega t - \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} i_b(t)e^{-jk\omega t}d\omega t \end{aligned} \quad (A.48)$$

A continuación se detallan los valores de cada una de las integrales que aparecen en este cálculo de armónicos:

- Término exponencial:

$$T_{xi}^{exp} = \int_{\gamma_{1i}}^{\gamma_{2i}} A_{xi}e^{-t/\tau_{xi}}e^{-jk\omega t}d\omega t = -\frac{A_{xi}}{jk+\frac{1}{\tau_{xi}\omega}}e^{-\omega t/(jk+\tau_{xi})}\Bigg|_{\gamma_{1i}}^{\gamma_{2i}} \quad (A.49)$$

- Término de continua:

$$T_{xi}^{dc} = \int_{\gamma_{1i}}^{\gamma_{2i}} B_{xi}U_{dc}e^{-jk\omega t}d\omega t = j\frac{B_{xi}U_{dc}}{k}e^{-jk\omega t}\Bigg|_{\gamma_{1i}}^{\gamma_{2i}} \quad (A.50)$$

- Término senoidal. La solución de esta integral depende del armónico *k-esimo* que se está calculando y del armónico *h-esimo* de tensión sobre el que se está realizando la integral:

$$T_{xi}^{h} = \int_{\gamma_{1i}}^{\gamma_{2i}} \frac{\sqrt{2}U_k\,\mathrm{sin}(h\omega t+\alpha_{kxi}-\varphi_{kxi})}{Z_{kxi}}e^{-jk\omega t}d\omega t \quad (A.51)$$

  - Armónicos del mismo orden:

$$T_{xi}^{h} = -\frac{\sqrt{2}U_k}{Z_{kxi}}\left[\frac{j\omega t}{2}e^{j(\alpha_{kxi}-\varphi_{kxi})}+\frac{1}{4k}e^{-j(2k\omega t+\alpha_{kxi}-\varphi_{kxi})}\right]_{\gamma_{1i}}^{\gamma_{2i}} \quad (A.52)$$

  - Armónicos de distinto orden:

$$\begin{aligned}T_{xi}^{h} = -\frac{\sqrt{2}U_k}{Z_{kxi}}e^{-jk\omega t}\Bigg[&\frac{h}{h^2-k^2}cos(h\omega t+\alpha_{kxi}-\varphi_{kxi})+ \\ &+\frac{jk}{h^2-k^2}sen(h\omega t+\alpha_{kxi}-\varphi_{kxi})\Bigg]_{\gamma_{1i}}^{\gamma_{2i}}\end{aligned} \quad (A.53)$$

Obtenidas las expresiones generales de las integrales que aparecen en el cálculo del armónico de intensidad *k-esimo*, éste se calcula sumando los términos de las ecuaciones (A.49)-(A.53) para todos los intervalos que componen un periodo, para las fases a y b:

$$\boldsymbol{I}_k = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\pi}\sum_i\left\{T_{ai}^{exp} - T_{ai}^{dc} + \sum_h T_{ai}^h\right\} - \\ - \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\sum_i\left\{T_{bi}^{exp} - T_{bi}^{dc} + \sum_h T_{bi}^h\right\} \tag{A.54}$$

Una vez calculados los armónicos de intensidad, es posible realizar la derivada respecto al módulo y argumento de la tensión de alimentación en bornas de las inductancias de conmutación. Estas derivadas, tal y como se ha comentado anteriormente, se utilizan a la hora de resolver la interacción armónica entre la red y el convertidor. Dichas derivadas sólo afectan a los términos T_{xi}^h definidos por las ecuaciones (A.52) y (A.53). Las derivadas de estos términos respecto a las tensiones armónicas son:

- Derivadas del término T_{xi}^k respecto al armónico *k-esimo* de tensión:

$$\frac{\partial T_{xi}^k}{\partial U_k} = -\frac{\sqrt{2}}{Z_{kxi}}\left[\frac{j\omega t}{2}e^{j(\alpha_{kxi}-\varphi_{kxi})} + \frac{1}{4k}e^{-j(2k\omega t+\alpha_{kxi}-\varphi_{kxi})}\right]_{\gamma_{1i}}^{\gamma_{2i}} \tag{A.55}$$

$$\frac{\partial T_{xi}^k}{\partial \alpha_k} = \frac{\sqrt{2}U_k}{Z_{kxi}}\left[\frac{\omega t}{2}e^{j(\alpha_{kxi}-\varphi_{kxi})} + \frac{j}{4k}e^{-j(2k\omega t+\alpha_{kxi}-\varphi_{kxi})}\right]_{\gamma_{1i}}^{\gamma_{2i}} \tag{A.56}$$

- Derivadas del término T_{xi}^k respecto al armónico *h-esimo* de tensión:

$$\frac{\partial T_{xi}^k}{\partial U_h} = -\frac{\sqrt{2}}{Z_{kxi}}e^{-jk\omega t}\left[\frac{h}{h^2-k^2}cos(h\omega t+\alpha_{kxi}-\varphi_{kxi}) + \right. \\ \left. + \frac{jk}{h^2-k^2}sen(h\omega t+\alpha_{kxi}-\varphi_{kxi})\right]_{\gamma_{1i}}^{\gamma_{2i}} \tag{A.57}$$

$$\frac{\partial T_{xi}^k}{\partial \alpha_h} = -\frac{\sqrt{2}U_k}{Z_{kxi}}e^{-jk\omega t}\left[\frac{-h}{h^2-k^2}sen(h\omega t+\alpha_{kxi}-\varphi_{kxi}) + \right. \\ \left. + \frac{jk}{h^2-k^2}cos(h\omega t+\alpha_{kxi}-\varphi_{kxi})\right]_{\gamma_{1i}}^{\gamma_{2i}} \tag{A.58}$$

A partir de las derivadas expresadas en (A.55)-(A.58), se pueden calcular la derivada del armónico *k-esimo* de la intensidad del vector de Park:

$$\frac{\partial \boldsymbol{I}_k}{\partial U_h} = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\pi}\sum_i \frac{\partial T_{ai}^k}{\partial U_h} - \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\sum_i \frac{\partial T_{bi}^k}{\partial U_h} \tag{A.59}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{I}_k}{\partial \alpha_h} = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\pi}\sum_i \frac{\partial T_{ai}^k}{\partial \alpha_h} - \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\sum_i \frac{\partial T_{bi}^k}{\partial \alpha_h} \tag{A.60}$$

A.8 Validación experimental del modelo

Para proceder a la validación del modelo se utiliza un variador de velocidad de 15 kVA y 380 V según el esquema de montaje de la Figura A.1, con el generador suministrando 3.5 kW. Los valores de impedancias de alimentación, así como el valor de la inductancia de continua se reflejan en la Tabla A.3.

Tabla A.3: Impedancias utilizadas.

Impedancia	Valor (Ω a 50 Hz)
Alimentación	0.137+j0.659
Continua	j0.314

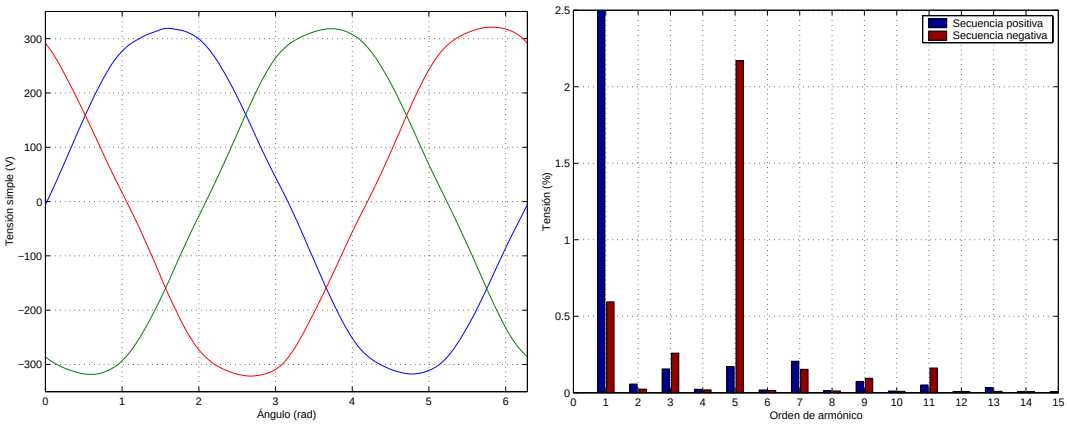
La tensión de alimentación utilizada es la disponible en la red de baja tensión. Dicha tensión presenta un desequilibrio en el fundamental, además de una acusada presencia de quinto armónico. Dichos armónicos, se resumen en la Tabla A.4. En estas condiciones de funcionamiento, la potencia absorbida por el variador de velocidad es de 4.5 kW. La representación temporal de las tensiones de fase y su descomposición de Fourier, en porcentaje respecto al fundamental, se muestran en la Figura A.11.

Mediante la aplicación del modelo se obtienen los valores para las constantes de integración K^a, K^b, K^c, ángulos de inicio de conducción β_a, β_b, β_c, ángulos de conmutación α_a, α_b, α_c y tensión del condensador U_{dc}, resumidos en la Tabla A.5.

En la Figura A.12 se muestran las intensidades absorbidas por el variador de velocidad calculadas mediante el modelo, con las constantes reflejadas en la Tabla A.5. Claramente se puede comprobar el efecto del desequilibrio de las tensiones en la desigualdad de la amplitud de los dos pulsos de intensidad de cada una de las fases. También se identifican con facilidad los periodos de conmutación.

Tabla A.4: Armónicos de la tensión de alimentación.

Armónico	Secuencia positiva		Secuencia negativa	
	Módulo	Fase	Módulo	Fase
	(A)	(rad)	(A)	(rad)
1	397.24	0	2.36	2.40
3	0.62	-1.77	1.03	-2.05
5	0.68	-0.64	8.63	2.76
7	0.82	-1.02	0.61	-1.15
9	0.29	-0.42	0.38	2.01
11	0.2	1.46	0.64	-0.62



(a) (b)

Figura A.11: Tensión de alimentación. (a) Tensiones simples. (b) Armónicos.

Tabla A.5: Resultados del modelo.

Valor	Fase a	Fase b	Fase c
K_1 (A)	1768.7	2571.1	3753.5
K_2 (A)	2247.2	3192.5	4541.6
K_3 (A)	3242.9	4508.7	6275.0
β (rad)	0.562	2.650	4.745
α (rad)	0.141	0.140	0.117
U_{dc} (V)	529.78		

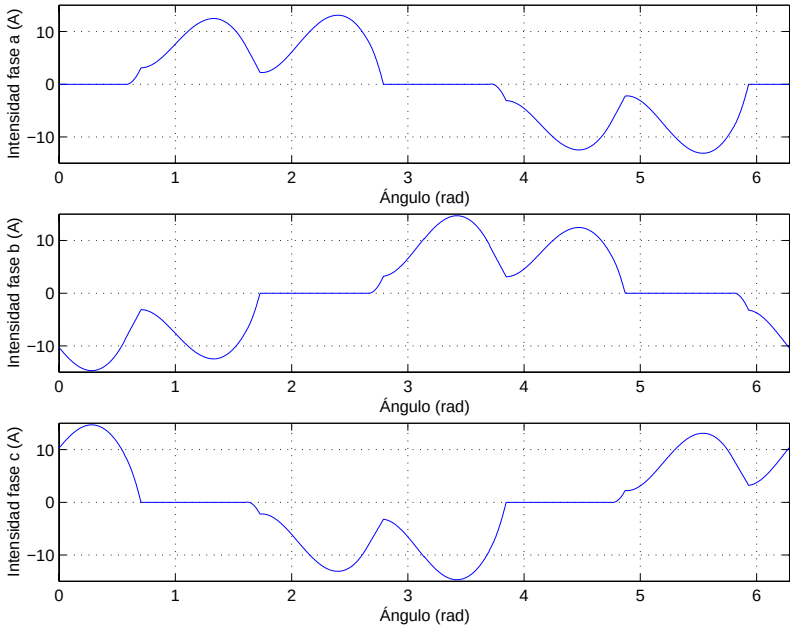


Figura A.12: Intensidades absorbidas por el rectificador calculadas por el modelo.

La concordancia entre las intensidades predichas por el modelo y las medidas para el semiperiodo positivo de la intensidad de la fase a se presentan en la Figura A.13. La comparación de los armónicos de secuencia positiva y negativa de las intensidades predichas por el modelo, tanto en módulo como en fase, así como los valores relativos de error, se presentan en las figuras A.14 y A.15 y en las tablas A.6 y A.7.

Tras los resultados obtenidos, puede concluirse que el modelo realizado reproduce con fidelidad el comportamiento real del variador de velocidad analizado.

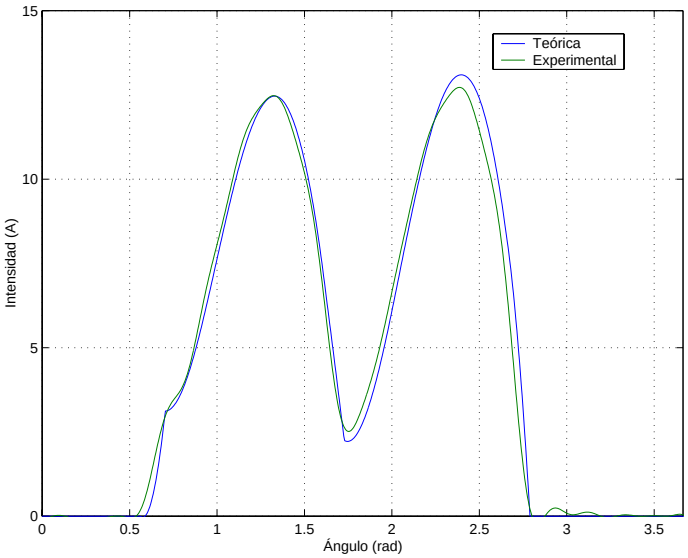
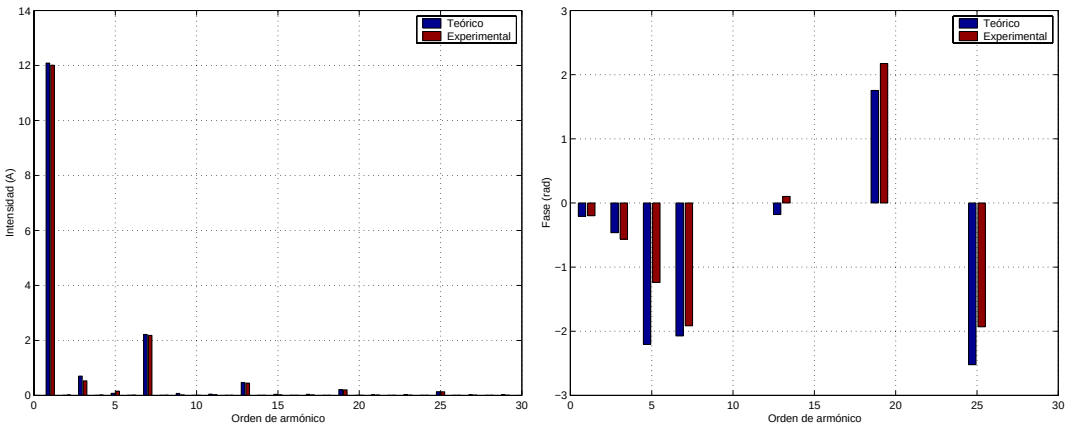
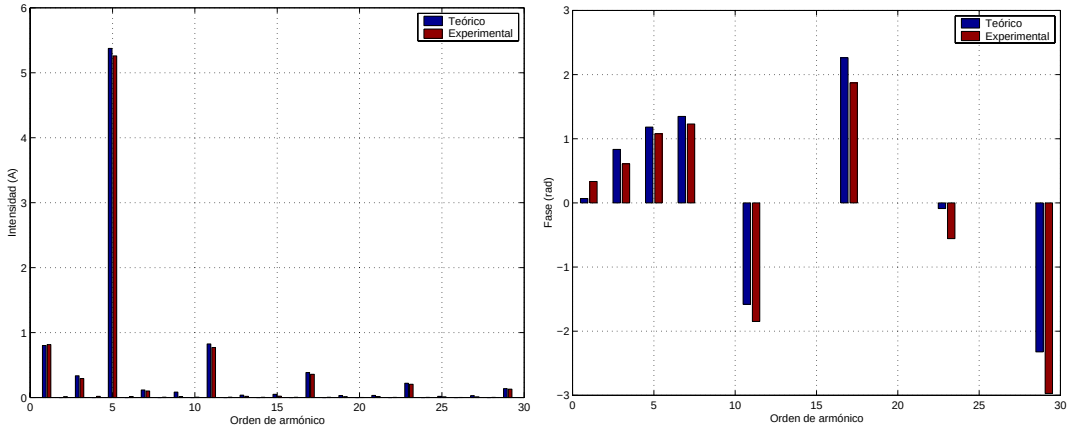


Figura A.13: Comparación de intensidades teóricas y experimentales.



(a) (b)

Figura A.14: Comparación de resultados teóricos y experimentales. (a) Valor eficaz. (b) Fase.



(a) (b)

Figura A.15: Comparación de resultados teóricos y experimentales. Secuencia inversa. (a) Valor eficaz. (b) Fase.

Tabla A.6: Comparación de resultados teóricos y experimentales. Secuencia positiva.

	Secuencia positiva					
Armónico	Teórico		Experimental		Errores	
	Módulo (A)	Fase (rad)	Módulo (A)	Fase (rad)	Módulo (%)	Fase (rad)
1	12.09	-0.21	12.01	-0.19	0.6	0.008
3	0.7	-0.46	0.53	-0.56	32.61	0.1
7	2.21	-2.07	2.18	-1.91	1.51	0.15
13	0.47	-0.18	0.45	0.10	4.86	0.28
19	0.21	1.75	0.2	2.10	6.35	0.42
25	0.13	-2.52	0.13	-1.93	0.25	0.59

Tabla A.7: Comparación de resultados teóricos y experimentales. Secuencia negativa.

	Secuencia negativa					
Armónico	Teórico		Experimental		Errores	
	Módulo (A)	Fase (rad)	Módulo (A)	Fase (rad)	Módulo (%)	Fase (rad)
1	0.8	0.07	0.81	0.33	1.67	0.26
3	0.33	0.83	0.29	0.61	15.00	0.22
5	5.37	1.18	5.26	1.07	2.17	0.10
7	0.12	1.35	0.10	1.23	14.83	0.11
11	0.83	-1.58	0.77	-1.84	7.20	0.26
17	0.38	2.26	0.36	1.88	7.41	0.39
23	0.22	-0.09	0.20	-0.55	7.96	0.47
29	0.14	-2.32	0.13	-2.97	7.16	0.65

Apéndice B

Instrumentación eléctrica

B.1 Introducción

En este apéndice se exponen los detalles más relevantes de la instrumentación eléctrica utilizada en la parte experimental de esta tesis. Dicha instrumentación consta, además de un conjunto de transductores de tensión e intensidad, de una tarjeta de adquisición de datos y de un instrumento virtual que se utiliza para calcular las componentes armónicas de las magnitudes medidas.

B.2 Transductores de tensión

Para formar un medidor de tensiones trifásico, se utilizan tres transductores de efecto Hall de tensión. Dichos transductores se alimentan con una tensión de $\pm$15V, y dan una intensidad medida I_m que es proporcional a la de entrada I_1, según el montaje de la Figura B.1.

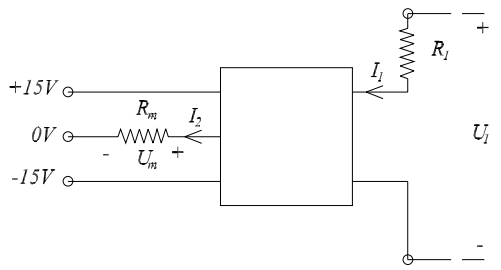


Figura B.1: Esquema del transductor de tensión.

Tabla B.1: Especificaciones técnicas de los transductores de tensión.

Intensidad		Precisión
Primaria (mA)	Secundaria (mA)	(%)
10	25	$\pm.6$
Alimentación (V)	Aislamiento (kV RMS/50Hz/1')	Temperatura (^0C)
± 15	2.5	0-70

Las especificaciones técnicas del transductor se muestran en la Tabla B.1.

El cálculo de la resistencia de entrada R_1 se realiza para que la intensidad de entrada al transductor esté lo más cercana posible a la intensidad nominal, ya que en estas circunstancias presenta la máxima precisión. Dado que se está interesado en medir tanto las tensiones simples como compuestas con la máxima precisión, se diseñan dos resistencias que se conmutarán mediante un relé en función de la medida que se esté interesado en realizar. Los valores de la resistencia R_1 son $22k\Omega$ para la medida de las tensiones simples y $37.7k\Omega$ para las de línea.

En cuanto a la resistencia de medida, esta tiene que estar comprendida entre 100Ω y 350Ω cuando en el primario del transductor se trabaja con la intensidad nominal. El valor que se ha tomado para esta resistencia es de 120Ω, por lo que la tensión de salida en función de la de entrada toma los siguientes valores:

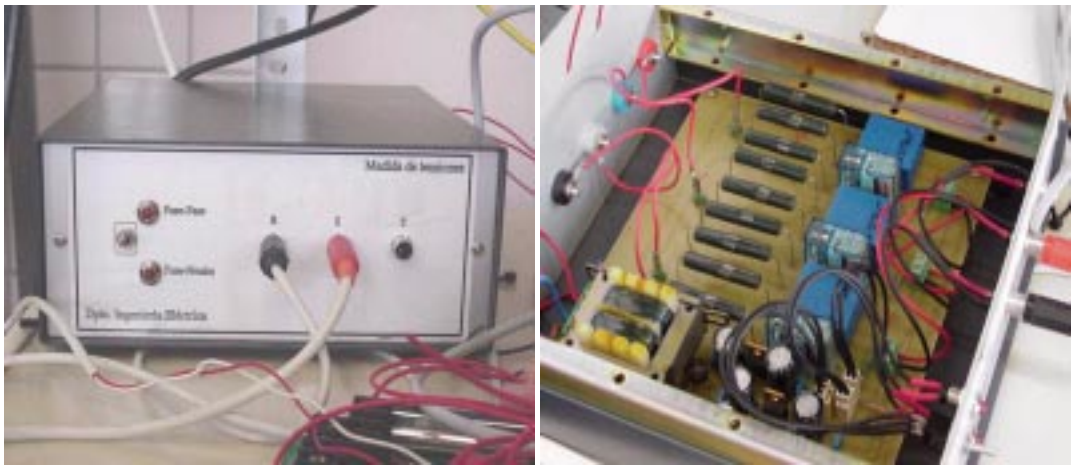
- Tensiones simples:

$$U_s = \frac{25}{10}\frac{U_1}{R_1}R_m = 1.36 \cdot 10^{-2}U_1 \tag{B.1}$$

- Tensiones compuestas:

$$U_s = \frac{25}{10}\frac{U_1}{R_1}R_m = 7.95 \cdot 10^{-3}U_1 \tag{B.2}$$

Para una red de 380/220V, se tienen como tensiones de salida 3V, dentro de los márgenes de tensión permitidos por la tarjeta de adquisición de datos. Por este motivo, se conectará directamente la salida de los transductores de tensión a esta tarjeta.



(a) (b)

Figura B.2: Transductor de tensión. (a) Exterior. (b) Interior.

En la Figura B.2 se puede ver la tarjeta diseñada para integrar todos los transductores de tensión. En ella se pueden apreciar los transductores, la fuente de alimentación de ±15V, los relés que conmutan las resistencias dependiendo de la tensión que se mide y las entradas de potencia en la parte posterior y las salidas de señal en la delantera.

B.3 Transductores de intensidad

Los transductores de intensidad que se utilizan se basan en el efecto Hall, proporcionando una tensión de salida proporcional a la intensidad que pasa por el circuito primario.

Al igual que en el caso de la medida de tensión, se está interesado en conocer el vector de Park asociado a las tres intensidades de fase, por lo que en general sería necesario realizar tres medidas de intensidad. Sin embargo, dado que en el sistema que se está analizando la circulación de componentes homopolares de intensidad no es posible por la falta del conductor neutro, tan solo es necesaria la presencia de dos transductores para cada medida trifásica que se desea realizar, pues la suma de las intensidades de fase es nula.

Se han utilizado dos tipos de sensores de efecto Hall, de núcleo continuo y núcleo partido, que se muestran en la Figura B.3. Los sensores de núcleo continuo son los que presentan un color gris claro, mientras que los de núcleo partido los de color negro. La ventaja de la utilización de este último radica en

Tabla B.2: Especificaciones técnicas de los transductores de intensidad de núcleo continuo.

Intensidad Primaria (A)	Tensión Secundaria (V)	Precisión (%)
200	±10V	1
Alimentación (V)	Aislamiento (kV RMS/50Hz/1')	Temperatura (^0C)
±15	5	0-60

Tabla B.3: Especificaciones técnicas de los transductores de intensidad de núcleo partido.

Intensidad Primaria (A)	Tensión Secundaria (V)	Precisión (%)
200	±5V	1
Alimentación (V)	Aislamiento (kV RMS/50Hz/1')	Temperatura (^0C)
±15	5	0-70

la mayor comodidad a la hora de introducir los cables del circuito primario, o la posibilidad de medir intensidades en circuitos sin necesidad de realizar una desconexión para instalar dicho transductor. Las especificaciones técnicas de ambos transductores se muestran en las tablas B.2 y B.3:

Como puede observarse, la intensidad nominal primaria de los transductores es muy alta en comparación con las intensidades que se tienen en la red de distribución a escala desarrollada. Por tanto, para elevar el número de amperios en el primario del transductor, se dan a estos un número N de vueltas adicionales, por lo que las tensiones de salida en función de las intensidades de entrada toman los siguientes valores:

- Sensor de efecto Hall de núcleo continuo:

$$U_s = \frac{10NI_1}{200} = 50 \cdot 10^{-3} NI_1 \tag{B.3}$$

Figura B.3: Tablero de centralización de sensores de intensidad.

- Sensor de efecto Hall de núcleo partido:

$$U_s = \frac{5NI_1}{200} = 25 \cdot 10^{-3} NI_1 \tag{B.4}$$

B.4 Cuadro central de sensores

En la validación experimental que se ha realizado, el número de medidas de intensidad es elevado. En particular, es necesario medir las intensidades de la fuente, de la carga lineal, de la carga no lineal y de cada uno de los filtros instalados. Además, como se está interesado en magnitudes trifásicas, cada una de estas medidas debe ser realizada al menos por dos sensores de efecto Hall, anteriormente descritos. Dado el elevado número de sensores utilizados, se optó por una agrupación de los mismos en el tablero de medida mostrado en la Figura B.3.

Además de los sensores, en dicho tablero pueden apreciarse dos placas que tienen cometidos diferentes y que se pueden apreciar en detalle en la Figura B.4. Una de ellas es la placa en la que se centralizan tanto las alimentaciones como las salidas de todos los sensores de intensidad. La otra tarjeta es la de entrada/salida de la tarjeta de adquisición de datos. Las salidas de los sensores, agrupadas en la primera tarjeta, se cablean hasta esta última.

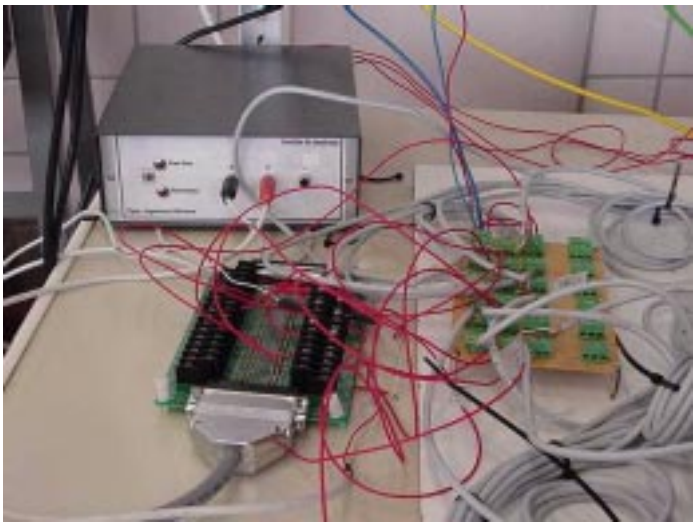


Figura B.4: Placas de alimentación de sensores y entrada/salida de la tarjeta de adquisición de datos.

Tabla B.4: Especificaciones técnicas de la tarjeta de adquisición de datos.

Velocidad de muestreo	100 kmuestras/s
Resolución	16 bit
Entradas analógicas	32 simples/16 diferenciales
Ganancia	1, 2, 4, 8
Rango de entrada bipolar	±10V, ±5V,±2.5V,±1.25V
Precisión	±1 bit

B.5 Tarjeta de adquisición de datos

La tarjeta de adquisición de datos utilizada es una ICP-DAS PCI1602, cuyas características técnicas más relevantes se muestran en la Tabla B.4.

Las salidas de los transductores de tensión e intensidad se acoplan directamente a la tarjeta de entrada/salida de la tarjeta de adquisición de datos, utilizándose las entradas analógicas en modo simple.

La tarjeta utilizada es compatible con el software comercial LabView de National Instruments, si bien las funciones de adquisición de datos son propias de la tarjeta. Dicho software comercial es el que ha sido utilizado para desarrollar el instrumento virtual encargado de calcular los armónicos de las

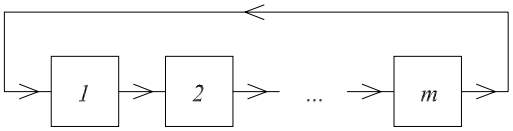


Figura B.5: Cola circular de la tarjeta de adquisición de datos.

medidas realizadas.

El procedimiento para realizar la adquisición se basa en una cola circular para los canales en los que se quiere obtener la medida, tal y como se muestra en la Figura B.5. Cada uno de los canales muestreados puede tener una ganancia y frecuencia de muestreo diferentes, lo cual dota a este procedimiento de una extraordinaria flexibilidad. El procedimiento a seguir para proceder a la programación de la cola circular que gestiona la adquisición de datos se describe a continuación:

- Inicializar el controlador. Esta función elimina toda la posible información que pudiera estar contenida en el controlador de la conversión analógico/digital de medidas previas.

- Añadir los canales a la cola circular. En este punto se añaden los canales deseados a la cola circular. Junto con el número del canal, se tiene que especificar la ganancia y la velocidad de muestreo deseada. Esta última característica es útil cuando se miden señales cuyas frecuencias de variación son muy diferentes. De esta forma es posible ahorrar memoria en aquellas señales de baja frecuencia.

- Inicio de la conversión. Una vez que todos los canales han sido especificados, la conversión analógico-digital se inicia según el orden de la cola circular y con las especificaciones realizadas para cada canal.

- Espera de los datos. Una vez iniciada la conversión, la cola circular se ejecutará un determinado número de veces. Al finalizar se devuelven las medidas de todos los canales y se procede a su análisis.

B.6 Descripción del instrumento virtual

El objetivo primordial del instrumento virtual desarrollado es el cálculo de los armónicos de las señales temporales de tensión e intensidad que se miden. Dicho instrumento, programado en LabView, gestiona un proceso que abarca desde la adquisición de datos hasta la salida a fichero de los resultados deseados.

Inicialmente se procede a la adquisición de datos, para luego ir a un tratamiento de los mismos que incluye la transformación al dominio de Park, la realización de la transformada de Fourier en el dominio complejo y la salida a fichero. También se indican los puntos en los cuales es posible realizar una representación gráfica en pantalla de los medidas realizadas: dominio del tiempo, Park y frecuencia. A continuación se describen cada uno de estas etapas:

- Adquisición de datos. Se utiliza la cola circular que se describió en la sección anterior. En este paso es importante conocer la frecuencia de muestreo con la que se van a tomar las medidas. Dicha frecuencia es función tanto del número máximo de canales que se van a medir como del armónico más alto en el que se está interesado. En principio y para cumplir el teorema del muestreo de Shannon, es necesario muestrear al menos al doble de la frecuencia del máximo armónico que se desea calcular [84]. Una vez obtenida esa frecuencia, si se multiplica por el número de canales que se quieren medir, se obtiene la frecuencia mínima de muestreo.

  Para todas las medidas, se toma una ventana rectangular de 10 ciclos de periodo. El uso de este tipo de ventanas puede falsear la medida si el punto inicial y final de la misma no coinciden [84], pudiendo producirse *dispersión* en la medida de los armónicos. Para prevenir este problema, que sucede siempre y cuando la forma de onda no se adapte al tamaño de ventana que se adquiere para aplicar la transformada de Fourier, es posible utilizar ventanas que quitan peso a los valores cercanos a su final y origen, como las de Hanning y Hamming [84], [76], [51].

  Por otra parte, es importante tener en cuenta que al muestrear más de un canal, las medidas no se toman en el mismo periodo de tiempo, sino que existe un pequeño desfase entre ellas, sirva de ejemplo la Figura B.6. En ella se puede ver el muestreo simultáneo de dos canales. La muestra k del canal 1 no coincide en el tiempo con la misma muestra del canal 2. Se ha comprobado que esa pequeña diferencia de tiempo tiene importancia a la hora de calcular los armónicos de una señal, pues no debe olvidarse que para el cálculo de los armónicos se necesitan al menos dos medidas

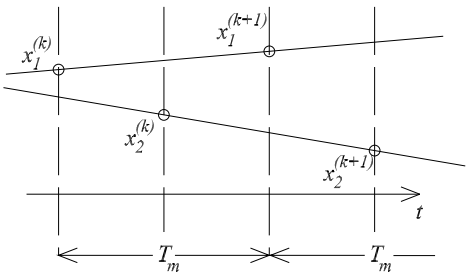


Figura B.6: Muestreo simultáneo de dos canales.

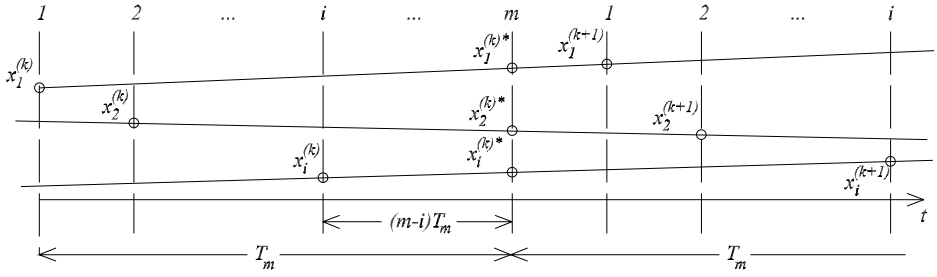


Figura B.7: Muestreo simultáneo de m canales. Referencia de todas las muestras al mismo punto.

para conformar el vector de Park. Para evitar los posibles errores que se derivan de del muestreo simultáneo de varios canales, una vez finalizada la conversión analógico-digital y obtenidas las medidas, se procede a un postprocesado de las mismas. El procedimiento consiste en obtener las medidas de todos los canales para un mismo instante de tiempo. Para ello, y basándose en que el intervalo de tiempo entre muestras es relativamente pequeño, se puede considerar una aproximación lineal entre dos muestras consecutivas. En la Figura B.7 se presentan dos muestras consecutivas de un grupo de m medidas. Si $x_i^{(k)}$ es la muestra original k de la medida i y T_m es el periodo de muestreo, se llega a la siguiente expresión para la muestra modificada referida al final del intervalo $x_i^{(k)*}$:

$$x_i^{(k)*} = x_i^{(k)} + \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{T_m} \cdot \frac{m-i}{m} T_m \qquad \text{(B.5)}$$

- Transformación al dominio de Park. Una vez referidas todas las medidas al mismo instante de tiempo, se transforman al dominio de Park,

mediante la aplicación de la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{y}_{dq} = T\boldsymbol{y}_{abc} \tag{B.6}$$

donde T es la matriz:

$$T = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \tag{B.7}$$

- Transformada compleja de Fourier. Obtenidas las magnitudes en el dominio de Park, se procede a aplicar la transformada compleja de Fourier. Esta función está disponible para su uso con LabView, no siendo necesario programarla. La salida de la función es un vector de números complejos que coinciden con los armónicos de la señal de entrada. Si el vector de entrada tiene N valores, el de salida tiene el mismo número. Los $N/2$ primeros corresponden a los componentes de secuencia positiva de los $N/2$ primeros armónicos, mientras que los $N/2$ restantes son el conjugado de la secuencia negativa de dichos armónicos.

  Por otra parte, en el proceso de adquisición de datos, no se impone ninguna condición a partir de la cual se tiene que comenzar la medida. En este sentido, si bien la amplitud de los armónicos se mantiene constante para medidas sucesivas, ya que se está en régimen permanente, no ocurre así con la fase. Para ello, una vez realizada la transformada de Fourier, se toma como origen de fases el primer armónico de la tensión del sistema. De esta forma, para referir los armónicos de todas las magnitudes medidas a este nuevo origen se utiliza la expresión:

  $$\boldsymbol{X}_k^* = \boldsymbol{X}_k e^{-jk\alpha_u} \tag{B.8}$$

  donde α_u es el ángulo original del primer armónico de la tensión del sistema, $\boldsymbol{X}_k$ es el armónico *k-esimo* del vector de Park $\boldsymbol{x}$, y $\boldsymbol{X}_k^*$ es el vector modificado tras el cambio a la nueva referencia.

- Representación gráfica. Una vez que se han calculado los armónicos, se procede a realizar una representación gráfica de las magnitudes en los diferentes dominios: fases, Park y frecuencia. La Figura B.8 muestra dicha representación. En la parte superior izquierda se puede apreciar las intensidades en cada una de las fases respecto al tiempo; en la parte superior derecha se tienen las tensiones en cada una de las fases. En

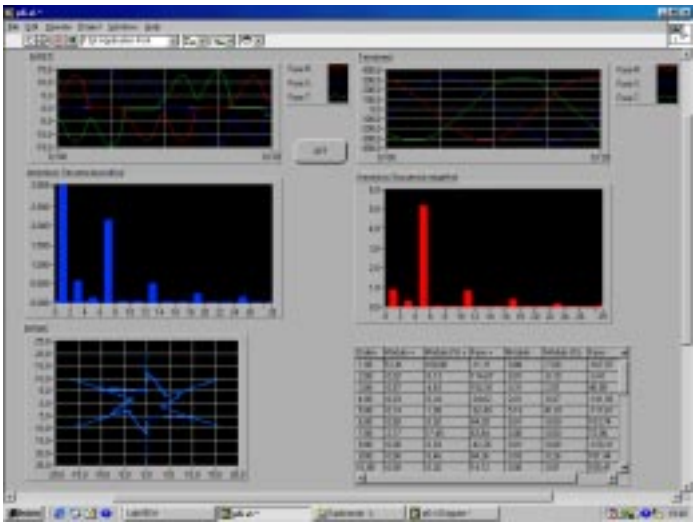


Figura B.8: Ventana principal del instrumento virtual.

la parte central se observa la descomposición en armónicos de secuencia positiva, izquierda, y negativa, derecha, de las intensidades representadas. Dichos valores se encuentran también reflejados tanto en valores absolutos como relativos en la tabla inferior derecha. Por último, en la parte inferior izquierda puede verse la figura geométrica descrita en el dominio de Park.

- Salida a fichero. Para evitar medidas espurias se realiza el proceso descrito en los apartados anteriores 25 veces en intervalos de 10 segundos. Los valores de armónicos que se salvan a fichero corresponden a la media de las medidas realizadas junto con las desviaciones típicas obtenidas.

Bibliografía

[1] H. Akagi, Y. Kanazawa, and A. Nabae. Instantaneous reactive power compensators comprising switching devices without energy storage components. *IEEE Transactions on Industry Applications*, IA-20(3):625–630, Mayo/Junio 1984.

[2] H. Akagi, A. Nabae, and S. Atoh. Control strategy of active power filters using multiple voltage-source PWM converters. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 22(3):460–465, Mayo/Junio 1986.

[3] R.L. Almonte and A.W. Ashley. Harmonics at the utility industrial interface: A real world example. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 31(6):1419–1426, Noviembre/Diciembre 1995.

[4] D. Andrews, M.T. Bishop, and J.F. Witte. Harmonic measurements, analysis and power factor correction in a modern steel manufacturing facility. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 32(3):617–624, Mayo/Junio 1996.

[5] J. Arrillaga Garmendia and L.I. Eguiluz Morán. *Armónicos en Sistemas de Potencia*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cantabria, 1994, Santander, 1994.

[6] J. Balda, K. Olejniczak, and C. Wang. Comments on the derating of distribution transformers serving nonlinear loadas. En *Second International Conference on Power Quality*, Atlanta, 1992.

[7] S. Battacharya, D.M. Divan, and B. Banerjee. Synchronous frame harmonic isolator using active series filter. En *EPE*, pp. 30–35, 1991.

[8] S. Bhattacharya, T.M. Frank, D.M. Divan, and B. Banerjee. Active filter implementation. *IEEE Industry Applications Magazine*, (3):47–63, Septiembre/Octubre 1998.

[9] G. Blanchon, J.-C. Dodu, A. Renaud, and M. Bouhtou. Implementation of a primal-dual interior-point method applied to the plannig of reactive power compensation devices. En *12 Power Systems Computation Conference*, pp. 827–836, 1996.

[10] C.I. Budeanu. Reactive and ficticius power. *Instytut Romain de l'Energie*, 1927.

[11] M.M. Cameron. Trends in power factor correction with harmonic filtering. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 29(1):60–65, Enero/Febrero 1993.

[12] J.M. Cano, G. Alonso, J. García Mayordomo, R. Asensi, M. Fernández Cabanas, and M. García Melero. New transfer functions for an accurate estimation of harmonic distortion in ac/dc convertrs working under unbalanced conditions. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 37(2):642–649, Marzo/Abril 2001.

[13] CENELEC. *UNE-EN50160. Características de la Tensión Suministrada por las Redes Generales de Distribución*, Enero 2001.

[14] Standardisation Specific Committee. Application guide to the european standard EN50160 on voltage characteristics of electricity supplied by public distribution systems. Technical report, UNIPEDE, Julio 1995.

[15] L.S. Czarnecki. An orthogonal decomposition of the current of nonsinusoidal voltage sources applied to non-linear loads. *International Journal on Circuit Theory and Applications*, 11:235–239, 1983.

[16] L.S. Czarnecki. Considerations on the reactive power in nonsinusoidal situations. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, IM-34(3):399–404, Septiembre 1985.

[17] L.S. Czarnecki. What is wrong with the Budeanu concept of reactive and distortion power and why it should be abandoned. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, IM-36(3):834–837, Septiembre 1987.

[18] L.S. Czarnecki. Orthogonal decomposition of the currents in a 3-phase nonlinear asymmetrical circuit with a nonsinusoidal voltage source. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 37(1):30–34, Marzo 1988.

[19] L.S. Czarnecki. Reactive and unbalanced currents compensation in three-phase asymmetrical circuits under nonsinusoidal conditions. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 38(3):754–759, Junio 1989.

[20] L.S. Czarnecki. Distortion power in systems with nonsinusoidal voltage. *IEE Proceedings-B*, 139(3):276–280, Mayo 1992.

[21] L.S. Czarnecki. Common and fixed-poles resonant harmonic filters. *European Transactions on Electric Power*, 8(5):345–351, Septiembre/Octubre 1998.

[22] L.S. Czarnecki. An overview of methods of harmonic suppression in distribution systems. En *IEEE 2000 WinterMeeting*, 2000.

[23] L.S. Czarnecki and H. Ginn. Effectiveness of resonant harmonic filters and its improvement. En *IEEE 2000 WinterMeeting*, 2000.

[24] Ministerio de Economía. *Real Decreto 1955/2000, por el que se regulan las actividades de transporte, distribución, comercialización, suministro y procedimientos de autorización de instalaciones de energía eléctrica*, Diciembre 2000.

[25] Ministerio de Economía. *Real Decreto 3490/2000, por el que se establece la tarifa eléctrica para el año 2001*, Diciembre 2000.

[26] D. Dini. Testing and rating of transformer for use with nonlinear loads. En *Second International Conference on Power Quality*, Atlanta, 1992.

[27] R.G. Dugan, M.F. McGranaghan, and H.W. Beaty. *Electrical Power System Quality.* McGraw-Hill, 1996.

[28] A.E. Emanuel. Powers in Nonsinusoidal Situations: a Review of Definitions and Physical Meaning. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 5(3):1377–1389, Julio 1990.

[29] A.E. Emanuel. The Oscillatory Nature of the Power in Single- and Polyphase Circuits. *European Transactions on Electrical Power*, 6(5):315–320, Septiembre/Octubre 1996.

[30] Jay F. *Standard Dictionary of Electrical and Electronics Terms (Fourth Edition).* The Institute of Electrical and Electronic Engineers, Inc., 1988.

[31] A. Ferrero and G. Superti-Furga. A new approach to the definition of power components in three-phase systems under nonsinusoidal conditions. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 40(3):568–577, Junio 1991.

[32] P.S. Filipski. Polyphase Apparent Power and Power Factor under Distorted Waveform Conditions. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 6(3):1161–1165, Julio 1991.

[33] P.S. Filipski, Y. Baghzouz, and M.D. Cox. A Review of Powers according to the IEEE Standard Dictionary. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 9(3):1237 –1244, Julio 1994.

[34] S. Fryze. Active, reactive and apparent power in circuits with sinusoidal voltage and current. Part 1. *Przegl. Elektrotech.*, 7:193–203, 1931.

[35] S. Fryze. Active, reactive and apparent power in circuits with sinusoidal voltage and current. Part 3. *Przegl. Elektrotech.*, 22:673–676, 1932.

[36] J. García Mayordomo. *Análisis de los Armónicos Introducidos en la Redes Eléctricas por los Convertidores Estáticos de Potencia*. Tesis Doctoral, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Universidad Politécnica de Madrid, Julio 1986.

[37] J. García Mayordomo, L.F. Beites, and L. Zabala. A contribution for modeling controlled and uncontrolled ac/dc converters in harmonic power flows. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 13(4):1501–1508, Octubre 1998.

[38] H.L. Ginn. Resonant harmonic filters: Their optimization and limits of effectiveness. En *IEEE 2000 WinterMeeting*, 2000.

[39] D.A. Gonzales and J.C. McCall. Design of filters to reduce harmonic distortion in industrial power systems. En *IEEE 1980 Annual Meeting-Toronto*, pp. 361–365, 1980.

[40] S. Granville. Optimal reactive dispatch through interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(1):136–146, Febrero 1994.

[41] IEEE Power Engineering Society Harmonics Working Group. *Tutorial on Harmonics Modeling and Simulation*, 1998.

[42] L. Gyugyi and E.C. Strycula. Active ac power filters. En *IEEE Industrial Applications Society Conference Record*, pp. 529–535, 1976.

[43] C. Kawann and A.E. Emanuel. Passive shunt harmonic filters for low and medium voltage: A cost comparison study. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(4):1825–1831, Noviembre 1996.

[44] N.L. Kusters and W.J.M. Moore. On the definition of reactive power under non-sinusoidal conditions. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-99(5):1845–1854, Septiembre/Octubre 1980.

[45] G. Lemieux. Power system harmonic resonance- a documented case. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 26(3):483–488, Mayo/Junio 1990.

[46] K.P. Lin, M.H. Lin, and T.P. Lin. An advanced computer code for single-tuned harmonic filter design. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 34(4):640–648, Julio/Agosto 1998.

[47] A. Ludbrook. Harmonic filters for notch reduction. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 24(5):947–954, Septiembre/Octubre 1988.

[48] P. Mattavelli. Design aspects of harmonic filters for high-power ac/dc converters. En *IEEE 2000 WinterMeeting*, 2000.

[49] P. Mattavelli and P. Tenti. Load and line identification in multi-phase systems: A compensation-oriented approach. *European Transactions on Electric Power*, 6(6):373–380, Noviembre/Diciembre 1996.

[50] P. Mattavelli and P. Tenti. Design aspects of hybrid compensation systems. *European Transactions on Electric Power*, 8(5):375–381, Septiembre/Octubre 1998.

[51] J.M. Maza Ortega. Medida y simulación de la propagación de armónicos en los sistemas eléctricos. Proyecto Fin de Carrera, Escuela Técnica Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla, Diciembre 1996.

[52] J.M. Maza Ortega, M. Burgos Payán, and C. Izquierdo Mitchell. Power factor correction and harmonic mitigaton in industry. En *2000 IEEE Industry Applications Conference*, Roma, 2000.

[53] J.M. Maza Ortega, J.L. Martínez Ramos, M. Burgos Payán, and C. Izquierdo Mitchell. Optimization of passive tuned filters by interior point methods. Pendiente de publicación en IEEE Transactions on Power Delivery.

[54] M.F. McGranaghan and D.R. Mueller. Designing harmonic filters for adjustable-speed drives to comply with IEEE-519 harmonic limits. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 35(2):312–318, Marzo/Abril 1999.

[55] S.J. Merhej and Nichols W.H. Harmonic filtering for the offshore industry. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 30(3):533–542, Mayo/Junio 1994.

[56] C.H. Page. Reactive power in nonsinusoidal situations. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, IM-29(5):420–423, Diciembre 1980.

[57] F. Peng. Application issues of active power filters. *IEEE Industry Applications Magazine*, pp. 21–30, Septiembre/Octubre 1998.

[58] J.K. Phipps. A transfer function approach to harmonic filter design. *IEEE Industry Applications Magazine*, pp. 68–82, Marzo/Abril 1997.

[59] W.E. Reid. Power quality issues–standards and guidelines. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 32(3):625–632, Mayo/Junio 1996.

[60] P.F. Ribeiro. On the adequacy of ideal current sources as models of nonlinear loads in harmonic studies. *IEEE Power Engineering Review*, pp. 50–51, Enero 2000.

[61] J. Schlabbach, G. Seifert, T. Weber, and W. Wellssow. Simulation and measurements of harmonic propagation in MV-systems- case studies and modelling requirements. En *13th Power System Computation Conference*, pp. 1070–1076, Trondheim, 1999.

[62] D. Sharon. Reactive power definitions and power-factor improvement in nonlinear systems. *IEE Proceedings*, 120(6):704–706, Junio 1973.

[63] D. Sharon. Reactive power definitions and power-factor improvement in nonlinear systems. *IEE Proceedings*, 121(5):390–392, Mayo 1974.

[64] D. Sharon. Power factor definitions and power transfer quality in nonsinusoidal situations. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 45(3):728–733, Junio 1996.

[65] W. Shepherd and P. Zakhikani. Suggested definition of reactive power for nonsinusoidal systems. *IEE Proceedings*, 119(9):1362, 1972.

[66] W. Shepherd and P. Zakhikani. Suggested definition of reactive power for nonsinusoidal systems. Réplica a Micu E. *IEE Proceedings*, 120(7):796–797, Julio 1973.

[67] W. Shepherd and P. Zakhikani. Reactive power definitions and power-factor improvement in nonlinear systems. Réplica a Sharon. *IEE Proceedings*, 121(5):390–392, Mayo 1974.

[68] W. Shepherd and P. Zand. *Energy Flow and Power Factor in Nonsinusoidal Circuits*. Cambridge University Press, 1979.

[69] B. Singh, K. Al-Haddad, and A. Chandra. A review of active filters for power quality improvement. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 46(5):960–971, Octubre 1999.

[70] M.A. Slonim and J.D. Van Wyk. Power components in a system with sinusoidal and nonsinusoidal voltages and/or currents. *IEE Proceedings*, 135(2):76–84, Marzo 1988.

[71] M.A. Slonim and J.D. Van Wyk. Distortion power in linear and non-linear systems. *International Journal on Electronics*, 68(5):769–778, 1990.

[72] V. Soares, P. Verdelho, and G.D. Marques. An instantaneous active and reactive current component method for active filters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 15(4):660–669, Julio 2000.

[73] IEEE Industry Applications Society and Power Engineering Society. *IEEE Recommended Practices and Requirements for Harmonic Control in Electrical Power Systems*, 1993.

[74] D.E. Steeper and R.P. Stratford. Reactive compensation and harmonic suppression for industrial power systems using thyristor converters. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 12(3):232–254, Marzo 1976.

[75] K.H. Sueker, S.D. Hummel, and R.D. Argent. Power factor correction and harmonic mitigation in a thyristor controlled glass melter. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 25(6):972–975, Noviembre/Diciembre 1989.

[76] Tektronix. *2630 Fourier Analyzer. Userś Guide*, 1990.

[77] UNESA. *Guía sobre la calidad de onda en las redes eléctricas*, 1996.

[78] M. Valcárcel Fontao. *Análisis del Régimen Permanente de los Sistemas Eléctricos de Potencia con Elementos no Lineales mediante un Método de Reparto de Cargas con Armónicos.* Tesis Doctoral, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Universidad Politécnica de Madrid, Julio 1991.

[79] M. Valcárcel Fontao and J. García Mayordomo. Harmonic power flow for unbalanced systems. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 8(4):2052–2059, Octubre 1993.

[80] P. Verdelho and G.D. Marques. An active power filter and unbalanced current compensator. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 44(3):321–328, Junio 1997.

[81] S. Wei, H. Sasaki, J. Kubokawa, and R. Yokoyama. An interior point nonlinear programming for optimal power flow problems with a novel data structure. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13(3):870–877, Agosto 1998.

[82] S. Wei, H. Sasaki, and R. Yokoyama. An application of interior point quadratic programming algorithm to power systems optimization problems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(1):260–266, Febrero 1996.

[83] J.L. Willems. A new interpretation of the Akagi-Nabae power components for nonsinusoidal three-phase situations. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurements*, 41(4):523–527, Agosto 1992.

[84] R.A. Witte. *Spectrum and Network Measurements.* Prentice Hall, New Jersey, 1993.

[85] C.-J. Wu, J.-C. Chiang, S.-S. Yen, C.-J. Liao, J.-S Yang, and T.-Y. Guo. Investigation and mitigation of harmonic amplification problems caused by single-tuned filters. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 13(3):800–806, Julio 1998.

[86] D. Xia and G.T. Heydt. Harmonic power flow studies. Parts I & II. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-101(6):1257–1270, Junio 1982.

[87] Amir M.G. Zahedi. *Passive Filter Optimization in Distribution Feeders.* Tesis Doctoral, Worcester Polytechnic Institute, Julio 1995.

[88] I. Zamora Belver y V. Macho Stadler. *Estudio Bibliográfico sobre Distorsión Armónica producida por Convertidores Estáticos.* Iberdrola, 1997.