EJEMPLO DE CÁLCULO DE UN MOTOR ASÍNCRONO TRIFÁSICO

Enunciado:

Un motor de inducción posee estas características:

Trifásico	Rotor bobinado	$V_{1NL} = 400/690$ V
$f_1 = 50$ Hz	$n_N = 975$ r.p.m.	$m_i = m_v = 0{,}7$
$R_1 = 0{,}97\ \Omega$	$R'_2 = 0{,}99\ \Omega$	$X_{cc} = 6{,}21\ \Omega$

Si se desprecian las pérdidas mecánicas y el motor se conecta en *triángulo*, calcular:

a) La velocidad de sincronismo, el número de polos y la tensión de línea de la red.
b) La potencia y el par asignados.
c) El par máximo y la capacidad de sobrecarga.
d) El par y la intensidad de línea en el arranque directo y en el arranque estrella-triángulo.
e) La velocidad a la que girará si se lo alimenta a la tensión asignada y debe mover una carga constante de 67 Nm.
f) La nueva velocidad a la que girará este motor si se añade una resistencia de 2 Ω en serie con cada fase del rotor y debe seguir moviendo una carga constante de 67 Nm.
g) La resistencia que habrá que conectar en serie con cada fase del rotor para conseguir que el par de arranque sea máximo.
h) La tensión con que hay que alimentar a este motor para que su velocidad sea 978 r.p.m. cuando mueve la carga constante de 67 Nm.

NOTA: El rotor de esta máquina asíncrona permanece siempre en cortocircuito salvo en los apartados f) y g).

Resumen de datos:

$m_1 = 3$ fases	Rotor bobinado	$V_{1NL} = 400/690$ V	Triángulo
$f_1 = 50$ Hz	$n_N = 975$ r.p.m.	$m_i = m_v = 0{,}7$	$P_m \approx 0$ W
$R_1 = 0{,}97\ \Omega$	$R'_2 = 0{,}99\ \Omega$	$X_{cc} = 6{,}21\ \Omega$	
$R_x = 2\ \Omega$ (apartado **f)**)	$n = 978$ r.p.m. (apartado **h)**)	$M_r = 67$ Nm (apartados **e)**, **f)** y **h)**)	

Resolución:

a) Es sabido que la velocidad de sincronismo, expresada en r.p.m., se calcula mediante la expresión (1):

$$n_1 = \frac{60\ f_1}{p}$$

Por lo que, para una frecuencia f_1 de 50 Hz se pueden obtener las siguientes velocidades de sincronismo en función del número de pares de polos p del motor:

$$p = 1 \rightarrow n_1 = 3000 \text{ r.p.m.} \qquad p = 4 \rightarrow n_1 = 750 \text{ r.p.m.}$$
$$p = 2 \rightarrow n_1 = 1500 \text{ r.p.m.} \qquad p = 5 \rightarrow n_1 = 600 \text{ r.p.m.}$$
$$p = 3 \rightarrow n_1 = 1000 \text{ r.p.m.} \qquad p = 6 \rightarrow n_1 = 500 \text{ r.p.m.}$$

y así sucesivamente.

Por otra parte, la velocidad de giro n del rotor guarda la relación (2) con la velocidad de sincronismo n_1 y el deslizamiento s:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad \rightarrow \quad n = n_1(1 - s)$$

En funcionamiento normal el deslizamiento s es pequeño y la velocidad de giro n es ligeramente inferior a la de sincronismo n_1.

Por lo tanto, si en este caso se sabe que la frecuencia del estator f_1 vale 50 Hz y la velocidad asignada es de 975 r.pm. se puede deducir que la velocidad de sincronismo será de 1000 r.p.m. En efecto, de los posibles valores de velocidad de sincronismo para 50 Hz el más cercano por exceso a 975 r.p.m. es 1000 r.p.m.

Para $n_1 = 1000$ r.p.m. y $f_1 = 50$ Hz el número de pares de polos p vale 3. Luego, el número de polos es el doble, 2p = 6 polos.

En un motor trifásico el estator puede conectarse en estrella o en triángulo. Si se desea que la máquina funcione a su tensión asignada V_{1N}, las tensiones de línea deberán ser:

Conexión estrella: $V_{1NL} = \sqrt{3}\ V_{1N}$

Conexión triángulo: $V_{1NL} = V_{1N}$

En este caso el enunciado indica que el motor es de 400/690 V. Esto quiere decir que para que el motor reciba su tensión asignada de fase ($V_{1N} = 400$ V), la tensión de línea deberá ser $V_{1NL} = 690$ V si el estator está conectado en estrella y deberá ser $V_{1NL} = 400$ V si está conectado en triángulo.

<u>La velocidad de sincronismo es $n_1 = 1000$ r.p.m., el número de polos es 2p = 6 polos y la tensión de línea de la red de alimentación es $V_{1NL} = 400$ V.</u>

b) Cuando se conoce una velocidad, ésta no se utiliza directamente para calcular el comportamiento de un motor asíncrono sino que se emplea el deslizamiento correspondiente. Por esto, lo primero que hay que hacer cuando hay un dato de velocidad es calcular su deslizamiento. En este caso, para condiciones asignadas se tiene que:

$$s_N = \frac{n_1 - n_N}{n_1} = \frac{1000 - 975}{1000} = 0{,}025$$

Dado que se desprecian las pérdidas mecánicas (P_m) lo que hay que hacer es calcular la potencia interna y el par interno en condiciones asignadas.

En el circuito equivalente aproximado (Fig. 12) la potencia interna es la que se consume en la resistencia de carga R'$_c$. Luego:

$$P_u \approx P_{mi} = m_1\, I'^2_2\, R'_c = m_1 \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}\, R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1\right)$$

Utilizando la expresión anterior con los valores asignados de tensión (de fase), de frecuencia y de deslizamiento se obtiene:

$$P_{uN} \approx P_{miN} = 3 \cdot \frac{400^2}{\left(0{,}97 + \frac{0{,}99}{0{,}025}\right)^2 + 6{,}21^2} \cdot 0{,}99 \cdot \left(\frac{1}{0{,}025} - 1\right) = 11002 \text{ W}$$

El par asignado M_N se puede calcular a partir de la ecuación (39a):

$$M = \frac{P_{mi}}{\Omega} = \frac{P_{mi}}{\frac{2\pi}{60}\, n} \quad \rightarrow \quad M_N = \frac{P_{miN}}{\frac{2\pi}{60}\, n_N} = \frac{11002}{\frac{2\pi}{60}\, 975} = 108 \text{ Nm}$$

Este par también se podría haber calculado mediante la relación (42) utilizando la tensión asignada de fase ($V_{1N} = 400$ V) y el deslizamiento asignado ($s_N = 0{,}025$):

$$M_N = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s_N}}{\frac{2\pi}{60}\, n_1} \frac{V_{1N}^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s_N}\right)^2 + X_{cc}^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{0{,}99}{0{,}025}}{\frac{2\pi}{60}\, 1000} \frac{400^2}{\left(0{,}97 + \frac{0{,}99}{0{,}025}\right)^2 + 6{,}21^2} = 108 \text{ Nm}$$

<u>La potencia asignada es $P_{uN} = 11002$ W y el par asignado vale $M_N = 108$ Nm</u>.

c) El deslizamiento de par máximo s_m se calcula mediante la relación (43) en la que se utiliza el signo + cuando la máquina actúa como motor:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0{,}99}{\sqrt{0{,}97^2 + 6{,}21^2}} = 0{,}158$$

Utilizando este valor de deslizamiento en la relación (42) se deduce que:

$$M_{máx} = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s_m}}{\frac{2\pi}{60}\, n_1} \frac{V_{1N}^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s_m}\right)^2 + X_{cc}^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{0{,}99}{0{,}158}}{\frac{2\pi}{60}\, 1000} \frac{400^2}{\left(0{,}97 + \frac{0{,}99}{0{,}158}\right)^2 + 6{,}21^2} = 316 \text{ Nm}$$

Luego la capacidad de sobrecarga vale

$$\text{Capacidad de sobrecarga} = \frac{M_{máx}}{M_N} = \frac{316}{108} = 2{,}93$$

El par máximo de este motor vale $M_{máx}$ = 316 Nm y su capacidad de sobrecarga es 2,93.

d) Durante el arranque la corriente I'_{2a} del rotor reducida al estator es mucho mayor que la de vacío I_0 y, por lo tanto, se desprecia esta última. Así, del circuito equivalente aproximado de un motor asíncrono (véase la Fig. 12) y sabiendo que en el arranque el deslizamiento vale la unidad (s = 1) se obtiene que la intensidad de fase en un arranque viene dada por la relación (49):

$$I_a = I'_{2a} = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{1}\right)^2 + X_{cc}^2}} = \frac{400}{\sqrt{\left(0{,}97 + \frac{0{,}99}{1}\right)^2 + 6{,}21^2}} = 61{,}4\ \text{A}$$

Al tratarse de conexión triángulo la corriente de línea de arranque directo $\sqrt{3}$ veces mayor que la de fase:

$$I_{aL} = \sqrt{3} \cdot 61{,}4 = 106\ \text{A}$$

El par de arranque directo M_a se calcula mediante la ecuación del par (42) teniendo en cuenta que ahora el deslizamiento vale 1:

$$M_a = \frac{m_1 \frac{R'_2}{1}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_{1N}^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{1}\right)^2 + X_{cc}^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{0{,}99}{1}}{\frac{2\pi}{60} 1000} \frac{400^2}{\left(0{,}97 + \frac{0{,}99}{1}\right)^2 + 6{,}21^2} = 107\ \text{Nm}$$

Se sabe que en el arranque estrella-triángulo la corriente de línea y el par están relacionados con las correspondientes magnitudes del arranque directo mediante las fórmulas (53):

$$I_{a\lambda} = \frac{I_{aL}}{3} = \frac{106}{3} = 35{,}4\ \text{A} \qquad M_{a\lambda} = \frac{M_a}{3} = \frac{107}{3} = 35{,}7\ \text{Nm}$$

El par y la corriente de línea en el arranque directo son, respectivamente, M_a = 107 Nm e I_{aL} = 61,4 A. El par y la corriente de línea en el arranque estrella-triángulo son, respectivamente, $M_{a\lambda}$ = 35,7 Nm e $I_{a\lambda}$ = 35,4 A.

e) En un motor de inducción el deslizamiento s es una manera práctica de indicar la velocidad de giro. Por lo tanto, si se desconoce una velocidad inmediatamente se debe pensar en obtener primero el deslizamiento para, a partir de él, calcular la velocidad.

El punto de funcionamiento será aquel en el se igualan el par del motor y el par resistente de la carga (Fig. 16). Como el par resistente es constante e igual a 67 Nm, sucederá que en este caso el punto de funcionamiento el motor deberá suministrar un par útil de 67 Nm. Si se desprecian las pérdidas mecánicas el par útil de la máquina es igual a su par interno, el cual se puede calcular mediante la relación (42). Luego, de todo lo anterior se deduce que:

$$M = \frac{m_1 \frac{R'_2}{s}}{\frac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_{1N}^2}{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} \rightarrow 67 = \frac{3 \cdot \frac{0{,}99}{s}}{\frac{2\pi}{60} 1000} \frac{400^2}{\left(0{,}97 + \frac{0{,}99}{s}\right)^2 + 6{,}21^2}$$

Esto es una ecuación de segundo grado en la que la incógnita es el deslizamiento s de la máquina en este estado. Esta ecuación se puede resolver más fácilmente si se realiza este cambio de variable:

$$x = \frac{R'_2}{s} = \frac{0{,}99}{s}$$

Con lo que la ecuación a resolver es:

$$67 = \frac{3 \cdot x}{\frac{2\pi}{60} 1000} \frac{400^2}{(0{,}97 + x)^2 + 6{,}21^2}$$

Se obtienen estas dos soluciones:

$$x = \begin{cases} 65{,}9 \\ 0{,}60 \end{cases} \rightarrow s = \begin{cases} \mathbf{0{,}015} \\ 1{,}65 \end{cases}$$

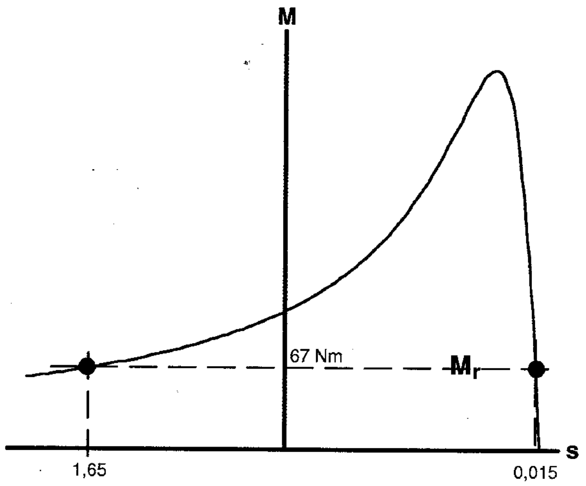

Fig. 26: *Curva de par para el apartado e) del ejemplo*

Si se representan estos dos puntos de funcionamiento sobre la curva del par (ver la Fig. 26) se observa que el primero corresponde a un funcionamiento como motor en la zona de bajos deslizamientos (zona usual de trabajo para este tipo de máquinas) y el otro corresponde a funcionamiento con gran deslizamiento (como freno a contracorriente). Por lo tanto, la solución buscada es la primera.

La velocidad de giro y el deslizamiento están relacionados mediante la relación (2). Luego:

$$n = n_1 (1 - s) = 1000 (1 - 0{,}015) = 985 \text{ r.p.m.}$$

La velocidad del motor en estas condiciones vale 985 r.p.m.

f) Al igual que en el apartado anterior, en el nuevo punto de funcionamiento el motor seguirá proporcionando un par de 67 Nm.

Si se reduce la resistencia R_x al estator (mediante una relación similar a la (18)) se obtiene este valor:

$$R'_x = m_i \cdot m_v \cdot R_x = 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 2 = 0{,}98 \ \Omega$$

La máquina se comporta ahora como si la resistencia del secundario reducida la primario fuera la suma $R'_2 + R'_x$. Luego, la ecuación del par (42) ahora se convierte en:

$$M = \frac{m_1 \dfrac{R'_2+R'_x}{s}}{\dfrac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_{1N}^2}{\left(R_1 + \dfrac{R'_2+R'_x}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}$$

Luego, en este caso se tiene que:

$$67 = \frac{3 \cdot \dfrac{0{,}99 + 0{,}98}{s}}{\dfrac{2\pi}{60} 1000} \frac{400^2}{\left(0{,}97 + \dfrac{0{,}99 + 0{,}98}{s}\right)^2 + 6{,}21^2}$$

Esto vuelve a ser una ecuación de segundo grado que permite despejar el deslizamiento de la máquina en este estado. De forma análoga a como se hizo en el apartado anterior, esta ecuación se puede resolver más fácilmente si se realiza este cambio de variable:

$$x = \frac{R'_2+R'_x}{s} = \frac{0{,}99 + 0{,}98}{s} = \frac{1{,}97}{s}$$

Con lo que la ecuación a resolver es la misma que antes:

$$67 = \frac{3 \cdot x}{\dfrac{2\pi}{60} 1000} \frac{400^2}{(0{,}97 + x)^2 + 6{,}21^2}$$

Se obtienen estas dos soluciones:

$$x = \begin{cases} 65{,}9 \\ 0{,}60 \end{cases} \rightarrow \quad s = \begin{cases} \mathbf{0{,}03} \\ 3{,}28 \end{cases}$$

En la Fig. 27 se comparan las curvas de par de la máquina cuando el rotor está en cortocircuito (apartado e)) y cuando a cada fase del rotor se añade la resistencia R_x (apartado (f)).

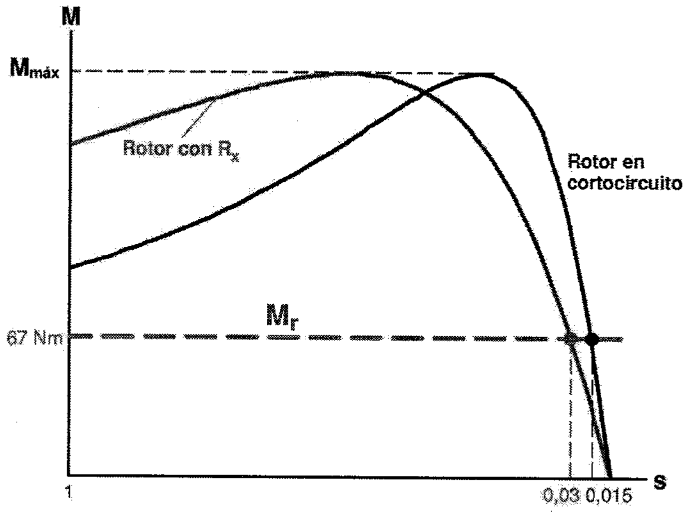

Fig. 27: Comparación entre las curvas de par para los apartados e) y f) del ejemplo

El valor que interesa corresponde a un funcionamiento como motor en la zona de bajos deslizamientos (zona usual de trabajo para este tipo de máquinas). Luego la máquina tendrá un deslizamiento igual a 0,03, lo que corresponde a una velocidad:

$$n = n_1 (1 - s) = 1000 (1 - 0{,}03) = 970 \text{ r.p.m.}$$

La velocidad en estas condiciones vale 970 r.p.m.

g) Cuando se coloca una resistencia de valor R_{adic} en serie con cada fase del rotor se consigue que el par máximo se produzca en el arranque. Es decir, se consigue que el deslizamiento de par máximo valga 1. Luego, partiendo de la relación (43) se deduce la expresión (47):

$$s_m = 1 = \frac{R'_2 + R'_{adic}}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \quad \rightarrow \quad R'_{adic} = \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2} - R'_2$$

que, en este motor, da este resultado:

$$R'_{adic} = \sqrt{0{,}97^2 + 6{,}21^2} - 0{,}99 = 5{,}30 \ \Omega$$

Quitando la reducción al estator, se llega finalmente a

$$R_{adic} = \frac{R'_{adic}}{m_v \cdot m_i} = \frac{5{,}30}{0{,}7 \cdot 0{,}7} = 10{,}8 \ \Omega$$

La resistencia a conectar en serie con cada fase del rotor para obtener el par máximo en el arranque vale $R_{adic} = 10{,}8 \ \Omega$.

h) Como en los apartados e) y f) en este nuevo punto de funcionamiento el motor seguirá proporcionando un par de 67 Nm.

El deslizamiento correspondiente a la velocidad de 978 r.p.m. se obtiene mediante la relación (2):

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{1000 - 978}{1000} = 0{,}022$$

Luego, mediante la relación (42) se llega a:

$$M = \frac{m_1 \dfrac{R'_2}{s}}{\dfrac{2\pi}{60} n_1} \frac{V_1^2}{\left(R_1 + \dfrac{R'_2}{s}\right)^2 + X_{cc}^2} \rightarrow 67 = \frac{3 \cdot \dfrac{0{,}99}{0{,}022}}{\dfrac{2\pi}{60} 1000} \frac{V_1^2}{\left(0{,}97 + \dfrac{0{,}99}{0{,}022}\right)^2 + 6{,}21^2}$$

Despejando la tensión V_1 se obtiene un valor de 334 V. Como el motor está conectado en triángulo, la tensión de línea es igual a la de fase ($V_{1L} = V_1$).

En la Fig. 28 se comparan las curvas de par de la máquina cuando el motor está a la tensión asignada (apartado e)) y cuando está a una tensión menor (apartado (h)).

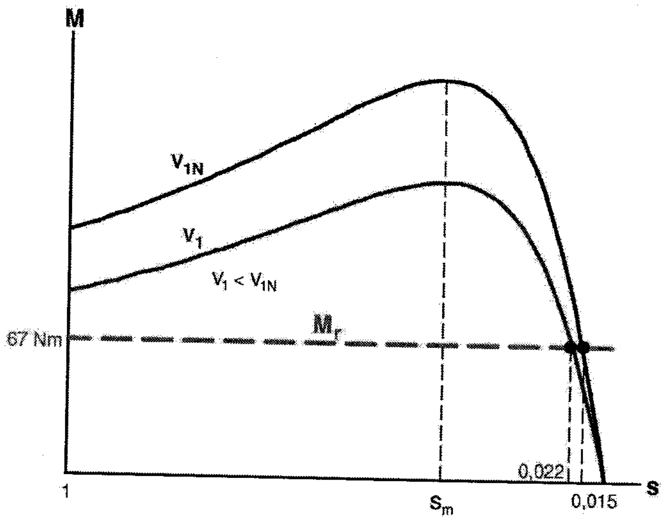

Fig. 28: Comparación entre las curvas de par para los apartado e) y h) del ejemplo

<u>Para que la velocidad sea 978 r.p.m. cuando el motor mueve una carga de 67 Nm, la tensión de línea debe reducirse a un valor $V_{1L} = 334$ V.</u>